Тема: **Методы вычисления пределов.**

1. **Прослушайте звуковой файл https://yadi.sk/d/GAwCUdZWxswYqw, одновременно читая лекцию.**
2. **Составить краткий конспект (записать формулы, примеры).**

Рассмотрим основные приемы вычисления пределов функций.

1) **Предел многочлена:**

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, то есть предел многочлена в данной точке равен значению многочлена в этой точке.

Пример1.

$$\lim_{x\to 2}(5x^3 + 2x^2 - 3x + 7) = 5\cdot 2^3 + 2\cdot 2^2 - 3\cdot 2 + 7 = 40 + 8 - 6 + 7 = 49$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to -1}(2x^4 - 3x^3 - 6x + 4) = 2\cdot(-1)^4 - 3\cdot(-1)^3 - 6\cdot(-1) + 4 = \\ = 2\cdot 1 - 3\cdot(-1) + 6 + 4 = 2 + 3 + 6 + 4 = 15$$

2) **Предел отношения многочленов**

а) Если g(a) ≠ 0, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$$

б) Если g(a) = 0, f(a) = A ≠ 0, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{0} = \infty$$

в) Если g(a) = 0, f(a) = 0, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

В данном случае имеем неопределенность типа $\frac{0}{0}$, которая раскрывается путем разложения на множители числителя и знаменателя (или того, что возможно) и дальнейшего сокращения дроби.

Пример 3.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3 - 2x - 4}{x^2 + 3x + 5} = \frac{3^3 - 2\cdot 3 - 4}{3^2 + 3\cdot 3 + 5} = \frac{27 - 6 - 4}{9 + 9 + 5} = \frac{17}{23}$$

Пример 4.

$$\lim_{x\to 1}\frac{4x+8}{5x-5}=\frac{4\cdot 1+8}{5\cdot 1-5}=\left[\frac{12}{0}\right]=\infty$$

Пример 5.

$$\lim_{x\to -9}\frac{x+9}{x^2-81}=\left[\frac{-9+9}{(-9)^2-81}\right]=\left[\frac{0}{0}\right]$$
$$=\lim_{x\to -9}\frac{x+9}{(x+9)\cdot(x-9)}=\lim_{x\to -9}\frac{1}{x-9}=\frac{1}{-9-9}=-\frac{1}{18}$$

Пример 6.

$$\lim_{x\to 10}\frac{x^2-100}{x-10}=\left[\frac{10^2-100}{10-10}\right]=\left[\frac{0}{0}\right]$$
$$=\lim_{x\to 10}\frac{(x+10)\cdot(x-10)}{(x-10)}=\lim_{x\to 10}(x+10)=10+10=20$$

Пример 7.

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{0}{0}=(*)$$

Разложим числитель на множители.

Для того, чтобы разложить квадратный трехчлен на множители, надо найти его корни, то есть решить квадратное уравнение

$$2x^2-3x-5=0$$
$$D=(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-5)=9+40=49$$
$$\sqrt{D}=\sqrt{49}=7$$
$$x_1=\frac{-(-3)-7}{2\cdot 2}=\frac{3-7}{4}=\frac{-4}{4}=-1$$
$$x_2=\frac{-(-3)+7}{2\cdot 2}=\frac{3+7}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

Разложение квадратного трехчлена на множители выглядит так:

$ax^2+вx+c=a(x-- x_1)(x-x_2)$

$$2x^2-3x-5=2(x+1)\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)=(x+1)\cdot(2x-5)$$

$$(*)=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\cdot(2x-5)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(2x-5)=-2-5=-7$$

г) Предел отношения многочленов при $x\to\infty$

Пример 8.

а)$\lim\limits_{x\to\propto}\frac{3x^3-2x^2+3x+1}{4x^3-x^2+7x+8} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\propto}\frac{\frac{3x^3}{x^3}-\frac{2x^2}{x^3}+\frac{3x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{4x^3}{x^3}-\frac{x^2}{x^3}+\frac{7x}{x^3}+\frac{8}{x^3}} = \lim\limits_{x\to\propto}\frac{3-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{4-\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}+\frac{8}{x^3}} =$

$\frac{3-0+0+0}{4-0+0+0} = \frac{3}{4}$

б)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+3x-2}{x^4-2x^3+3x-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\propto}\frac{\frac{x^3}{x^4}+\frac{3x}{x^4}-\frac{2}{x^4}}{\frac{x^4}{x^4}-\frac{2x^3}{x^4}+\frac{3x}{x^4}-\frac{1}{x^4}} = \lim\limits_{x\to\propto}\frac{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^3}-\frac{2}{x^4}}{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x^4}} =$

$$= \frac{0+0-0}{1-0+0-0} = \frac{0}{1} = 0$$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^5-2x^4+3x}{x^3+2x^2+4x-2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\propto}\frac{\frac{4x^5}{x^5}-\frac{2x^4}{x^5}+\frac{3}{x^5}}{\frac{x^3}{x^5}+\frac{2x^2}{x^5}+\frac{4x}{x^5}-\frac{2}{x^5}} = \lim\limits_{x\to\propto}\frac{4-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^5}}{\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}+\frac{4}{x^4}-\frac{2}{x^5}} =$

$$= \frac{4-0+0}{0+0+0-0} = \frac{4}{0} = \infty$$

3)Метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение

Продолжаем рассматривать неопределенность вида $\frac{0}{0}$

Следующий тип пределов похож на предыдущий тип. Единственное, помимо многочленов, у нас добавятся корни.

Пример 9

Найти предел $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}$

Сначала пробуем подставить 3 в выражение под знаком предела **Еще раз повторяю – это первое, что нужно выполнять для ЛЮБОГО предела**. Данное действие обычно проводится мысленно или на черновике.

$$\frac{\sqrt{3+6}-\sqrt{10\cdot 3-21}}{5\cdot 3-15} = \frac{\sqrt{9}-\sqrt{9}}{15-15} = \frac{0}{0}$$

Получена неопределенность вида $\frac{0}{0}$, которую нужно устранять.
$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}=\frac{0}{0}=(*)$$

Когда в числителе (знаменателе) находится разность корней (или корень минус какое-нибудь число), то для раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$ используют **метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение**.

Вспоминаем формулу разности квадратов: $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

И смотрим на наш предел: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}$

$(a-b)$ у нас в числителе уже есть. Теперь для применения формулы осталось организовать $(a+b)$ (которое и называется **сопряженным выражением**).

Умножаем числитель и знаменатель на сопряженное выражение:

$$(*)=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21})\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=(*)$$

Теперь самое время применить вверху формулу $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$:

$$(*)=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6})^2-(\sqrt{10x-21})^2}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+6-(10x-21)}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+6-10x+21}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=(*)$$

Неопределенность $\frac{0}{0}$ не пропала (попробуйте подставить тройку).

Вынесем за скобку в числителе -9, а в знаменателе 5 и получим

$$\lim_{x\to 3}\frac{-9(x-3)}{5(x-3)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21}}=$$
$$=-\frac{9}{5}\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21}}=-\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{3+6}+\sqrt{10\cdot 3-21}}=$$
$$=-\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{9}}=-\frac{9}{5\cdot 6}=-\frac{3}{5\cdot 2}=-0{,}3$$

3. Выполнить практическую работу (по вариантам):

ВАРИАНТ 1

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to -1}\left(4x^3-2x^2-8x=1\right)$ б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+6}{x^2-9x+2}$ в) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+x+1}{3x^3+x^2+1}$ д) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$

2. Найти точки разрыва функции и определить их род: $f(x)=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)(x^2-9)}$

ВАРИАНТ 2

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^6-9x^5+4x^3+11x-2\right)$ б) $\lim\limits_{x\to -6}\frac{x^2-9x+3}{x-6}$ в) $\lim\limits_{x\to -8}\frac{x+8}{x^2-64}$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-9x^2+12x-5}{9x^3+5x^2-11x+3}$ д) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-3}}{x^2-9}$

2. Найти точки разрыва функции и определить их род: $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$

ВАРИАНТ 3

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 2}(2x^4-5x^2+8x-9)$ б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-8x+5}$ в) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x-5}{x^2-25}$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^4-2x^3+8x-11}{2x^4-4x^2+7x+9}$ д) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{4x^4-x^3}}{5x^2+x}$

2. Найти точки разрыва функции и определить их род: $f(x)=\frac{(x+2)(x-6)}{x(x^2-4)}$

ВАРИАНТ 4

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to -1}(2x^5-5x^2+9x-3)$ б) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x-5}{x^2+3x+1}$ в) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{x+4}{x^2-16}$

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{6x^5-8x^4+9x^3+2x-9}{3x^5-8x^3+2x^2+4x-11}$ д) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$

2. Найти точки разрыва функции и определить их род: $f(x)=\frac{x-3}{x^2-9}$

ВАРИАНТ 5

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to -2}(5x^3-8x^2+4x+7)$ б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-6x+1}{2x^2+3x-2}$ в) $\lim\limits_{x\to -8}\frac{x^2-64}{x+8}$

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{5x^4-10x^3+9x^2-6x+9}{4x^4-5x^3-11x^2+4x-3}$ д) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-3}}{x^2-9}$

2. Найти точки разрыва функции и определить их род: $f(x)=\frac{x-4}{x^2-16}$

ВАРИАНТ 6

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to -1}\left(4x^3-8x^2+6x-12\right)$ б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x^2-8x+5}{2x-7}$ в) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x+2}{x^2-4}$

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{5x^2-3x+7}{3x^2+2x-4}$ д) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{4x^4-x^3}}{5x^2+x}$

2. Найти точки разрыва функции и определить их род: $f(x)=\frac{x+5}{x^2-25}$

В каждом из вариантов задание 1.д) и задание 2 рассчитаны на оценку «5» (то есть необязательны к выполнению).

1 вариант	Баганов К., Бублик В, Киселев А.
2 вариант	Козлов М., Мехоношина В., Молодцова А.
3 вариант	Силантьев К., Фатуллаев Р., Федотов Н.
4 вариант	Филиппова К., Щекоткин Д., Крайнов А.
5 вариант	Ипполитов Е., Князев А., Мухин М., Нестеров А.
6 вариант	Осипов А., Царев Н., Тюленев Д., Штанько А.

Все практические работы выполнять на отдельных листках (оформлять аккуратно, разборчивым почерком) сфотографировать и отправить на электронную почту: olga.georg.gor@yandex.ru