<u>Тема:</u> Определение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка. Основные методы решения.

1. **Изучить теоретический материал, составить конспект.**

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

В теории и практике различают два типа таких уравнений – **однородное уравнение** и **неоднородное уравнение**.

Однородное ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами имеет следующий вид:
$y'' + py' + qy = 0$, где p и q – константы (числа), а в правой части – **строго** ноль.

Неоднородное ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:
$y'' + py' + qy = f(x)$, где p и q – константы, а $f(x)$ – функция, зависящая *только от «икс»*. В простейшем случае функция $f(x)$ может быть числом, *отличным от нуля*.

Рассмотрим алгоритм решения линейного однородного уравнения второго порядка:
$y'' + py' + qy = 0$

Для того чтобы решить данное ДУ, нужно составить так называемое

характеристическое уравнение:
$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

По какому принципу составлено характеристическое уравнение, отчётливо видно: вместо второй производной записываем λ^2; вместо первой производной записываем просто «лямбду»; вместо функции y ничего не записываем.

$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ – это **обычное квадратное уравнение**, которое предстоит решить.

Существуют три варианта развития событий. Они доказаны в курсе математического анализа, и на практике мы будем использовать готовые формулы.

Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня

Если характеристическое уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет два **различных**

действительных корня λ_1, λ_2 (т.е., если дискриминант $D > 0$), то общее решение однородного уравнения выглядит так:
$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$, где C_1, C_2 – константы.

В случае если один из корней равен нулю, решение очевидным образом упрощается; пусть, например, $\lambda_1 = 0$, тогда общее решение: $y = C_1e^{0\cdot x} + C_2e^{\lambda_2 x} = C_1 + C_2e^{\lambda_2 x}$.

Пример 1

Решить дифференциальное уравнение $y'' + y' - 2y = 0$

Решение: составим и решим характеристическое уравнение:
$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$
$D = 1 + 8 = 9; \sqrt{D} = 3$

$\lambda_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$, $\lambda_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$

Получены два различных действительных корня
Всё, что осталось сделать – записать ответ, руководствуясь формулой $y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$

Ответ: общее решение: $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{x},\ где\ \ C_1, C_2 - const$

Пример 2

Найти общее решение дифференциального уравнения, выполнить проверку $y'' - 4y' = 0$

Решение: Составим и решим характеристическое уравнение:
$\lambda^2 - 4\lambda = 0$
$\lambda(\lambda - 4) = 0$
$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$ – различные действительные корни

Ответ: общее решение: $y = C_1 + C_2e^{4x},\ где\ \ C_1, C_2 - const$

Пример 3.
Решить дифференциальное уравнение $y''-6y'+5y=0$.
Решение.
Запишем сначала соответствующее характеристическое уравнение: $k^2-6k+5=0$.
Корни данного уравнения равны $k_1=1, k_2=5$.
Поскольку корни действительны и различны, общее решение будет иметь вид: $y(x)=C_1e^x+C_2e^{5x}$, где C_1 и C_2 − произвольные постоянные.

Характеристическое уравнение имеет два кратных действительных корня

Если характеристическое уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет два **кратных** (совпавших) действительных корня $\lambda_1 = \lambda_2$ (дискриминант $D = 0$), то общее решение однородного уравнения принимает вид:

$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}$, где C_1, C_2 – константы.

Вместо λ_1 в формуле можно было нарисовать λ_2, корни всё равно одинаковы.

Пример 4

Решить дифференциальное уравнение $y'' - 6y' + 9y = 0$

Решение: составим и решим характеристическое уравнение:
$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$
Здесь можно вычислить дискриминант, получить ноль и найти кратные корни. Но можно применить известную школьную формулу сокращенного умножения:
$(\lambda - 3)^2 = 0$

Получены два кратных действительных корня $\lambda_{1,2} = 3$

Ответ: общее решение: $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$, где $C_1, C_2 - const$

Пример 5

Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' + y = 0$

Пример 4: ***Решение:*** *составим и решим характеристическое уравнение:*
$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$
$(\lambda + 1)^2 = 0$

Получены два кратных действительных корня $\lambda_{1,2} = -1$

Ответ: *общее решение:* $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$, где $C_1, C_2 - const$

Характеристическое уравнение имеет сопряженные комплексные корни

Для понимания третьего случая требуются элементарные знания про комплексные числа. Если материал позабылся, повторите уроки от 20.01.21и от 22.01. Если характеристическое уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет **сопряженные** комплексные корни $\lambda_1 = \alpha - \beta i$, $\lambda_2 = \alpha + \beta i$ (дискриминант $D < 0$), то общее решение однородного уравнения принимает вид:
$y = e^{\alpha x} \cdot (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$, где C_1, C_2 – константы.
Примечание: Сопряженные комплексные корни почти всегда записывают кратко следующим образом: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$

Пример 6

Решить однородное дифференциальное уравнение второго порядка $y'' - 2y' + 10y = 0$

Решение: Составим и решим характеристическое уравнение:

$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$

$D = 4 - 40 = -36$

$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i$ – получены сопряженные комплексные корни

Ответ: общее решение: $y = e^x(C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x),\ где\ \ C_1, C_2 - const$

Пример 7. Решить дифференциальное уравнение y″+4y′+5y=0.

Решение:

Сначала запишем соответствующее характеристическое уравнение и определим его корни: $k^2-4k+5=0, \Rightarrow D=16-4\cdot5=-4, \Rightarrow k_{1.2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = 2 \pm 2i.$

Таким образом, характеристическое уравнение имеет пару комплексно-сопряженных корней: $k_1=2+i$, $k_2=2-i$.

В этом случае общее решение выражается формулой $y(x)=e^{2x}[C_1\cos x+C_2\sin x]$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Пример 8: Решить дифференциальное уравнение y″+4=0.

Решение: Составим и решим характеристическое уравнение:

$\lambda^2 + 4 = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm 2i$ – получены сопряженные комплексные корни, поэтому общее решение:

$y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x,\ где\ \ C_1, C_2 - const$

2. Выполнить практическую работу (по вариантам)

Вариант 1

1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 6y' + 8y = 0$

Вариант 2

1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 3y' - 4y = 0$

Вариант 3

1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 14y' + 49y = 0$

Вариант 4

1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' + 5y = 0$

Вариант 5

1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 3y' = 0$

1 вариант	Баганов К., Бублик В, Ипполитов Е., Киселев А.
2 вариант	Козлов М., Мехоношина В., Осипов А., Молодцова А.
3 вариант	Силантьев К., Фатуллаев Р., Царев Н., Федотов Н.
4 вариант	Филиппова К., Щекоткин Д., Тюленев Д., Крайнов А.
5 вариант	Князев А., Мухин М., Нестеров А., Штанько А.

Все практические работы выполнить на отдельных листках (оформлять аккуратно, разборчивым почерком) сфотографировать и отправить на электронную почту: **olga.georg.gor@yandex.ru**