<u>Тема:</u> Приложения определенного интеграла

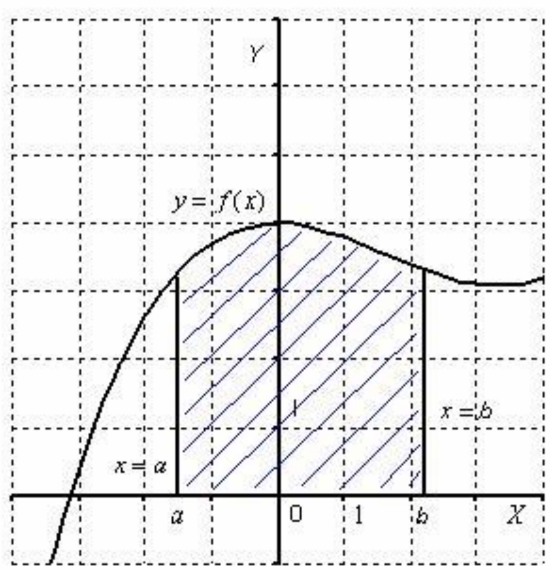
1. ***Изучить теоретический материал, прослушав звуковой файл*** **https://yadi.sk/d/J7BD7C46198Rjg**
2. ***Составить конспект (записать определения, примеры, выполнить чертежи).***

Переходим к рассмотрению приложений интегрального исчисления.

1.Вычисление площадей фигур.

Криволинейной трапецией называется плоская фигура, ограниченная графиком непрерывной и не меняющей на отрезке [*а;в*] функции у = f(x), прямыми *х = а, х = в*, осью *ОХ.*

Пусть данная фигура расположена *не ниже* оси абсцисс:

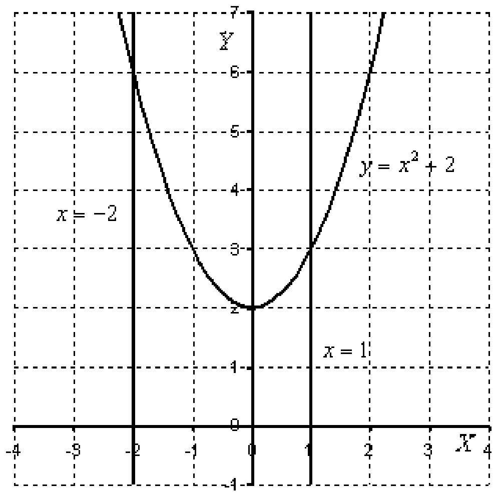


Тогда **площадь криволинейной трапеции численно равна определенному интегралу**

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

<u>Пример 1</u>

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 1$.



На отрезке $[-2;1]$ график функции $y = x^2 + 2$ расположен **над осью** OX, поэтому:

$$S = \int_{-2}^{1}(x^2+2)dx = \left(\frac{x^3}{3}+2x\right)\Big|_{-2}^{1} = \frac{1}{3}+2-\left(-\frac{8}{3}-4\right) = \frac{1}{3}+2+\frac{8}{3}+4 = 9$$

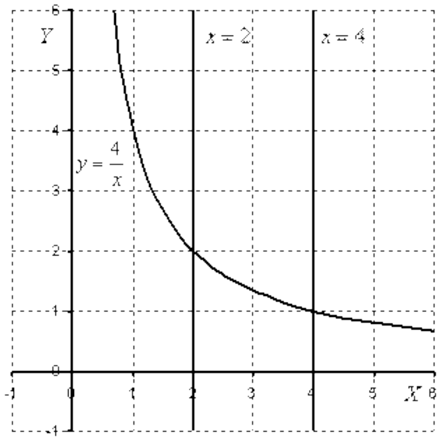
Ответ: $S = 9\ ед^2$

Пример 2

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 4$, $x = 2$, $x = 4$ и осью OX

Решение:

Выполним чертеж:



На отрезке $[2;4]$ график функции $y = \frac{4}{x}$ расположен над осью OX, поэтому:

$$S = \int_{2}^{4}\frac{4dx}{x} = 4(\ln x)\Big|_{2}^{4} = 4(\ln 4 - \ln 2) = 4\ln\frac{4}{2} = 4\ln 2$$

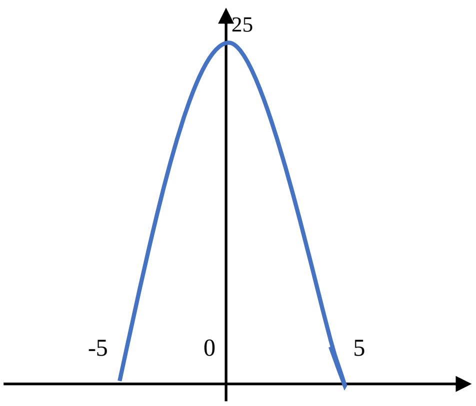
Ответ: $S = 4\ln 2\ ед^2 \approx 2{,}77\ ед^2$

Пример 3

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 25 - x^2$, $y = 0$.

Найдем точки пересечения графиков этих функций: $25 - x^2 = 0$; $x = -5$; $x = 5$.

Построим график функции $y = 25 - x^2$



Так как криволинейная трапеция симметрична относительно оси ординат, то можно найти ее площадь не на отрезке [-5;5], а на отрезке [0;5], а затем ее удвоить:

$$S = 2\int_0^5(25-x^2)dx = 2\left(25x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^5 =$$

$$= 2(\left(25\cdot 5-\frac{5^3}{3}\right)-\left(25\cdot 0-\frac{0^3}{3}\right)) = \frac{500}{3}$$

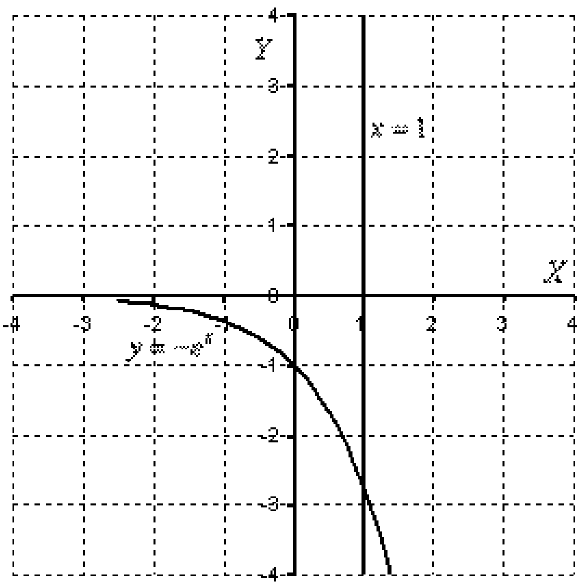
Ответ: S =500/3 ед^2

Если криволинейная трапеция расположена под осью OX **(или, по крайней мере, *не выше*** **данной оси), то её площадь можно найти по формуле:** $S=-\int_a^b f(x)dx$

Пример 4

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-e^x$, $x=1$ и координатными осями.

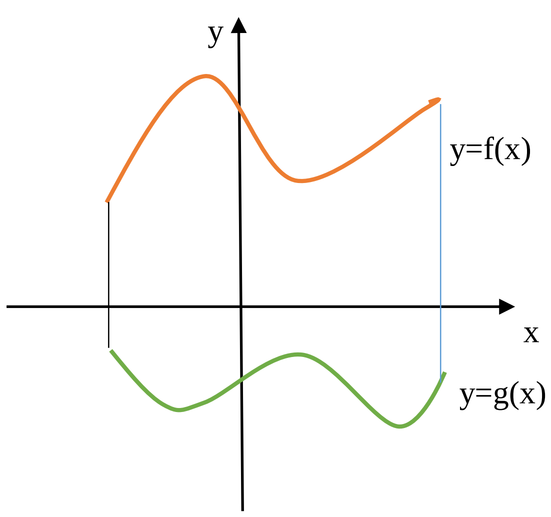
Решение: Выполним чертеж:



$$S=-\int_0^1(-e^x)dx=\int_0^1 e^x dx=e^x\Big|_0^1=e^1-e^0=e-1$$

Ответ: $S=(e-1)$ ед^2 $\approx 1{,}72$ ед^2

Если на отрезке $[a;b]$ некоторая непрерывная функция $f(x)$ больше либо равна некоторой непрерывной функции $g(x)$, то площадь фигуры, ограниченной графиками данных функций и прямыми $x=a$, $x=b$, можно найти по формуле: $S=\int_a^b(f(x)-g(x))dx$



Пример 5

Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = -x$.

Решение: Сначала нужно выполнить чертеж. Вообще говоря, при построении чертежа в задачах на площадь нас больше всего интересуют точки пересечения линий. Найдем точки пересечения параболы $y = 2x - x^2$ и прямой $y = -x$.

Решаем уравнение:

$2x - x^2 = -x$

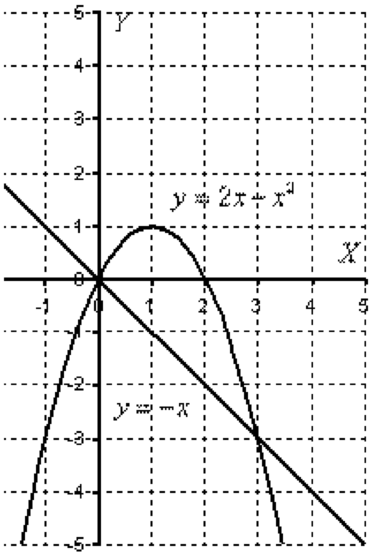
$3x - x^2 = 0$

$x(3 - x) = 0$

$x_1 = 0, x_2 = 3$

$y_1=0$, $y_2 = -3$

Значит, нижний предел интегрирования $a = 0$, верхний предел интегрирования $b = 3$.
Выполним чертеж: Прямая y = -x проходит через точки (0;0) и (3; -3), парабола с вершиной (1; 1) проходит через эти же точки.



Здесь уже не надо думать, где расположена фигура – над осью или под осью, и, грубо говоря, **важно, какой график ВЫШЕ** (относительно другого графика), **а какой – НИЖЕ**.

В рассматриваемом примере очевидно, что на отрезке $[0;3]$ парабола располагается выше прямой, а поэтому из $2x - x^2$ необходимо вычесть $-x$

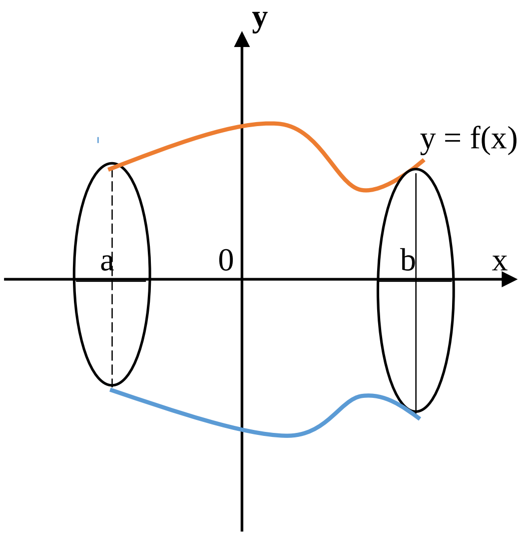
Искомая фигура ограничена параболой $y = 2x - x^2$ сверху и прямой $y = -x$ снизу.
На отрезке $[0;3]$ $2x - x^2 \geq -x$, по соответствующей формуле:

$$S = \int_0^3 (2x - x^2 - (-x))dx = \int_0^3 (3x - x^2)dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} - 0 + 0 = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

Ответ: $S = 4\frac{1}{2}$ $ед^2$

2. Вычисление объемов тел вращения.

Представьте некоторую плоскую фигуру (криволинейную трапецию) на координатной плоскости. Её площадь мы уже находили. Но, кроме того, данную фигуру можно ещё и вращать вокруг оси абсцисс или вокруг оси ординат. Полученное тело называют телом вращения.



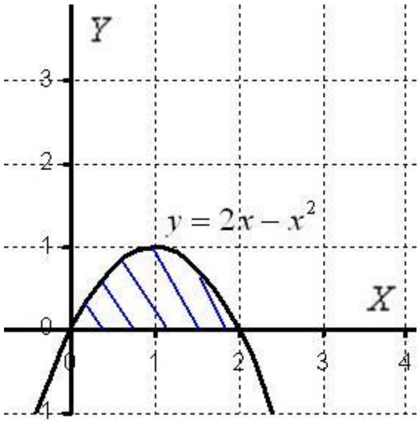
Объем тела вращения можно вычислить по формуле:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

<u>Пример 6</u>

Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$ вокруг оси OX.

Решение: Как и в задаче на нахождение площади, **решение начинается с чертежа плоской фигуры**. То есть, на плоскости XOY необходимо построить фигуру, ограниченную линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$, при этом не забываем, что уравнение $y = 0$ задаёт ось OX.



Искомая плоская фигура заштрихована синим цветом, именно она и вращается вокруг оси OX В результате вращения получается такая немного яйцевидная летающая тарелка, которая симметрична относительно оси OX. Вычислим объем тела вращения, используя формулу:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4)dx =$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \pi \cdot \left(\frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} - 0 \right) = \frac{16\pi}{15}$$

Ответ: $V = \frac{16\pi}{15}$ ед^3. $\approx 3{,}35$ ед^3.

3.Вычисление пути, пройденного точкой

Путь, пройденный точкой при неравномерном движении по прямой с переменной скоростью $v = f(t) \geq 0$ за промежуток времени от t_1 до t_2, вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt.$$

Пример 7. Скорость движения точки изменяется по закону $v = (3t^2 + 2t + 1)$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за 10 с от начала движения.

Решение. Согласно условию, $f(t) = 3t^2 + 2t + 1$, $t_1 = 0$, $t_2 = 10$. По формуле (2) находим

$$S = \int_0^{10} (3t^2 + 2t + 1)dt = \left[t^3 + t^2 + t\right]_0^{10} = 10^3 + 10^2 + 10 = 1110 \text{ (м).}$$

4.Вычисление работы силы

Работа, произведенная переменной силой $f(x)$ при перемещении по оси O_x материальной точки от $x = a$ до $x = b$, находится по формуле

$$A = \int_a^b f(x)dx. \qquad (1)$$

При решении задач на вычисление работы силы часто используется закон Гука:

$$F = kx, \qquad (2)$$

где F - сила, Н; x - абсолютное удлинение пружины, м, вызванное силой F, а k - коэффициент пропорциональности, Н/м.

Пример 8. Сжатие x винтовой пружины пропорционально приложенной силе F. Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 0,04 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила 10 Н.

<u>Решение</u>. Так как, $x = 0{,}01$ м при $F = 10$ Н, то, подставляя эти значения в равенство (2), получим $10 = k \cdot 0{,}01,$ откуда $k = 1000$ Н/м. Подставив теперь в это же равенство значение k, находим $F = 1000x$, т. е. $f(x) = 1000x.$ Искомую работу найдем по формуле (1), полагая $a = 0$, $b = 0{,}04$:

$$A = \int_0^{0{,}04} 1000x\,dx = 500x^2 \,\Big|_0^{0{,}04} = 0{,}8 \text{ (Дж).}$$

3. Выполнить практическую работу (по вариантам)

ВАРИАНТ 1

1. Вычислить определенный интеграл: $\int_0^3 \left(2x^2 - x + 4\right)dx$.
2. Скорость движения точки изменяется по закону $v = 3t^2 + 2t + 1$ (м/с). Найти путь S, пройденный точкой за 10 с от начала движения.
3. Вычислить, предварительно сделав рисунок, площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = -x^2 + 16, \quad y = 0,$.

ВАРИАНТ 2

1. Вычислить определенный интеграл: $\int_0^2 \left(4x^2 + x - 3\right)dx$.
2. Вычислить, предварительно сделав рисунок, площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = -x^2 + 4, \quad y = 0,$
3. Скорость движения точки изменяется по закону $v = 6t^2 + 4t + 1$ (м/с). Найти путь S, пройденный точкой за 10 с от начала движения.

ВАРИАНТ 3

1. Вычислить определенный интеграл: $\int_0^1 \left(3x^2 + 2x - 3\right)dx$.

2. Скорость движения точки изменяется по закону $v = 6t^2 - 4t$ (м/с). Найти путь S, пройденный точкой за 5 с от начала движения.

3.Вычислить, предварительно сделав рисунок, площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = -x^2 + 4, \quad y = 0,$

ВАРИАНТ 4

1. Вычислить определенный интеграл: $\int_0^3 \left(3x^2 - 2x + 5\right)dx$.

2. Вычислить, предварительно сделав рисунок, площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = -x^2 + 25, \quad y = 0,$.
3. Скорость движения точки изменяется по закону $v = 5t^2 - 3t$ (м/с). Найти путь S, пройденный точкой за 5 с от начала движения.

ВАРИАНТ 5

1. Вычислить определенный интеграл: $\int_1^2 \left(4x^2 - 2x + 1\right)dx$.
2. Скорость движения точки изменяется по закону $v = 3t^2 - 4t$ (м/с). Найти путь S, пройденный точкой за третью секунду.
3. Вычислить, предварительно сделав рисунок, площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = -x^2 + 4, \quad y = 0,$.

ВАРИАНТ 6

1. Вычислить определенный интеграл: $\int_1^2 \left(x^2 - 3x - 1\right)dx$.
2. Вычислить, предварительно сделав рисунок, площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = -x^2 + 9, \quad y = 0, \quad x = -1, \quad x = 1$
3. Скорость движения точки изменяется по закону $v = 3t^2 - 8t$ (м/с). Найти путь S, пройденный точкой за 4 с от начала движения.

1 вариант	Баганов К., Бублик В, Киселев А.
2 вариант	Козлов М., Мехоношина В., Молодцова А.
3 вариант	Силантьев К., Фатуллаев Р., Федотов Н.
4 вариант	Филиппова К., Щекоткин Д., Крайнов А.
5 вариант	Ипполитов Е., Князев А., Мухин М., Нестеров А.
6 вариант	Осипов А., Царев Н., Тюленев Д., Штанько А.

Все практические работы выполнить на отдельных листках (оформлять аккуратно, разборчивым почерком) сфотографировать и отправить на электронную почту: **olga.georg.gor@yandex.ru**