<u>Тема:</u> Отношения множеств. Отображения множеств. Мощность множества.

1. **Изучить теорию. Составить краткий конспект (записать определения, примеры, выполнить чертежи).**

Отображение множеств

Отображение множества A во множество B – это **правило**, по которому каждому элементу множества A ставится в соответствие элемент (или элементы) множества B. В том случае если в соответствие ставится <u>единственный</u> элемент, то данное правило называется *однозначно определённой* функцией или просто **функцией**.

Функцию, как многие знают, чаще всего обозначают буквой $f : A \to B$ – она ставит в соответствие **каждому** элементу $a \in A$ единственное значение $f(a)$, принадлежащее множеству B.

<u>Пример.</u> Рассмотрим множество из прошлого занятия: $S_1 = \{Аня, Ваня, Таня, Петя, Юля, Галя\}$ студентов 1-го ряда и предложим им 6 тем для рефератов (множество T):

$Аня \to$ **Векторы**

$Ваня \to$ **Матрицы**

$Таня \to$ **Определители**

$Петя \to$ **Комплексные числа**

$Юля \to$ **Теория пределов**

$Галя \to$ **Что такое производная?**

Установленное *(добровольно или принудительно)* правило f ставит в соответствие каждому студенту s множества S_1 единственную тему реферата $f(s)$ множества T.

Элементы множества S_1 образуют **область определения** функции (обозначается через $D(f)$), а элементы множества T – **область значений** функции (обозначается через $E(f)$).

Построенное отображение множеств имеет очень важную характеристику: оно является **взаимно-однозначным** или **биективным** (биекцией). В данном примере это означает, что <u>каждому</u> студенту поставлена в соответствие <u>одна уникальная</u> тема реферата, и обратно – <u>за каждой</u> темой реферата закреплён один и только один студент.

Однако не следует думать, что всякое отображение биективно. Если на 1-й ряд (к множеству S_1) добавить 7-го студента, то взаимно-однозначное соответствие пропадёт – либо один из студентов останется без темы *(отображения не будет вообще)*, либо какая-то тема достанется сразу двум студентам. Обратная ситуация: если к множеству T добавить седьмую тему, то взаимнооднозначность отображения тоже будет утрачена – одна из тем останется невостребованной.

Отношения множеств

Элементы множества, как правило, находятся в каком-либо отношении друг относительно друга. Эти отношения можно задать в виде неполных предложений -- предикатов, например, «меньше, чем...», «больше, чем ...», «эквивалентно», «конгруэнтно» и т. п.

Тот факт, что некоторый элемент находится в каком-либо отношении к элементу того же множества x_j, математически записывают как $XiRxj$, где R -- символ отношения.

Отношение из двух элементов множества X называют бинарным. Бинарные отношения множеств X и Y представляют собой некоторое множество упорядоченных пар *(x, y)*, образованных декартовым произведением X х Y. В общем случае можно говорить не только о множестве упорядоченных пар, но и о множестве упорядоченных троек, четверок элементов и т. д., т. е. о парных отношениях, получаемых в результате декартова произведения , где n -- размерность n-строчек.

Рассмотрим основные виды отношений -- отношения **эквивалентности, порядка и доминирования.**

Отношения эквивалентности

Некоторые элементы множеств можно считать эквивалентными в том случае, когда любой из этих элементов при определенных условиях можно заменить другим, т. е. данные элементы находятся в отношении эквивалентности. Примерами отношений эквивалентности являются отношения параллельности на множестве прямых какой-либо плоскости; подобия на множестве треугольников; принадлежности к одной функциональной группе микросхем или к одному классу типоразмеров и т. д.

Термин «отношение эквивалентности» будем применять при выполнении следующих условий:

1) каждый элемент эквивалентен самому себе;

2) высказывание, что два элемента являются эквивалентными, не требует уточнения того, какой из элементов рассматривается первым, а какой вторым;

3) два элемента, эквивалентные третьему, эквивалентны между собой.

Введем для обозначения эквивалентности символ ~, тогда рассмотренные условия можно записать следующим образом:

1) $x \sim x$ (рефлективность);

2) $x \sim y \quad y \sim x$ (симметричность);

3) $x \sim y$ и $y \sim z \quad x \sim z$ (транзитивность).

Отношения порядка

Отношения порядка возникают, когда мы хотим сравнивать элементы множеств. При этом мы ожидаем от результатов сравнения свойств, похожих на свойства сравнения чисел по величине.

Примерами отношений строгого порядка могут служить отношения "больше", "меньше", "старше" и т.п. Для чисел обычное обозначение - знаки "<", ">".

Примерами отношений нестрогого порядка могут служить нестрогие неравенства для чисел, отношение между точками плоскости или пространства "находиться ближе к началу координат".

Если в спортивном турнире не предусматривается дележа мест (т.е. каждый участник получает определенное, только ему присужденное место), то это пример строгого порядка; в противном случае - нестрогого.

Отношение доминирования

Говорят, что “x доминирует y” (обозначается $x \gg y$), когда x в каком-то смысле превосходит y. (Очевидно, строгий порядок – частный случай доминирования.)

Для любых двух элементов x и y, произвольно взятых из множества, обязательно выполняется хотя бы одно из условий: x доминирует над y; y доминирует над x; x и y безразличны; x и y несравнимы.

Мощность множества

Интуиция подсказывает, что термин характеризует размер множества, а именно количество его элементов. И интуиция нас не обманывает!

Мощность пустого множества равна нулю.

Мощность множества $S_1 = \{Аня, Ваня, Таня, Петя, Юля, Галя\}$ равна шести.

Мощность множества букв русского алфавита $A = \{а, б, в, \ldots, э, ю, я\}$ равна тридцати трём.

И вообще – **мощность любого *конечного* множества равно количеству элементов данного множества.**

Само собой, множества можно сравнивать по мощности и их равенство в этом смысле называется *равномощностью*. Равномощность определяется следующим образом:

Два множества являются равномощными, если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Множество S_1 студентов равномощно множеству T тем рефератов, множество A букв русского алфавита равномощно любому множеству из 33 элементов и т.д. Заметьте, что именно **любому** множеству из 33 элементов – в данном случае имеет значение лишь их количество. Буквы русского алфавита можно сопоставить не только с множеством номеров 1, 2, 3, …, 32, 33, но и вообще со стадом в 33 коровы.

Гораздо более интересно обстоят дела с бесконечными множествами. Бесконечности тоже бывают разными! Самые «маленькие» бесконечные множества – это ***счётные*** множества. Если совсем просто, элементы такого множества можно пронумеровать. Эталонный пример – это множество натуральных чисел $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$. Да – оно бесконечно, однако у каждого его элемента есть номер.

Примеров очень много. В частности, счётным является множество всех чётных натуральных чисел $\mathbf{N}_{2n} = \{2n \mid n \in \mathbf{N}\} = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$. Как это доказать? Нужно установить его взаимно-однозначное соответствие с множеством натуральных чисел или попросту пронумеровывать элементы:

$$\mathbf{N}_{2n} = \{\underset{①}{2}, \underset{②}{4}, \underset{③}{6}, \underset{④}{8}, \underset{⑤}{10}, \dots\}$$

Взаимно-однозначное соответствие установлено, следовательно, множества равномощны и множество $\mathbf{N}_{2n}$ счётно.

А вот множество действительных чисел $\mathbf{R}$ уже ***несчётно,*** т.е. его элементы пронумеровать невозможно. Данный факт хоть и очевиден, однако строго доказывается в теории множеств.