<u>Тема:</u> Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

1. ***Изучить теоретический материал.***
2. ***Составить конспект (записать определения, примеры).***

Дифференциальное уравнение вида $y' + py = q$, где p и q– функции от x или постоянные величины, называется ***линейным дифференциальным уравнением первого порядка.***

Линейное уравнение первого порядка <u>в стандартной записи</u> имеет вид:
$y' + p(x) \cdot y = q(x)$

Что мы видим?

1) В линейное уравнение входит первая производная y'.

2) В линейное уравнение входит произведение $p(x) \cdot y$, где y функция, а $p(x)$ – выражение, зависящее *только от «икс»*.

3) И, наконец, в линейное уравнение входит выражение $q(x)$, тоже зависящее *только от «икс»*. В частности, $q(x)$ может быть константой.

***Примечание**: разумеется, в практических примерах эти три слагаемых не обязаны располагаться именно в таком порядке, их спокойно можно переносить из части в часть со сменой знака.*

Перед тем, как перейти к практическим задачам, рассмотрим некоторые частные модификации линейного уравнения.

– Как уже отмечалось, выражение $q(x)$ может быть некоторой константой k (числом), в этом случае линейное уравнение принимает вид: $y' + p(x) \cdot y = k$

– Выражение $p(x)$ тоже может быть некоторой константой k, тогда линейное уравнение принимает вид: $y' + ky = q(x)$. В простейших случаях константа равна +1 или –1, соответственно, линейное уравнение записывается еще проще: $y' + y = q(x)$ или $y' - y = q(x)$.

– Рядом с производной может находиться множитель $r(x)$, зависящий *только от «икс»*: $r(x) \cdot y' + p(x) \cdot y = q(x)$ – это тоже линейное уравнение.

Пример 1

Решить дифференциальное уравнение $y' - y = e^x$

Решение: Данное уравнение является линейным и имеет простейший вид: $y' - y = q(x)$.

Как решить линейное уравнение?

Способ решения связан с заменой переменной и подстановкой, иногда его называют *методом Бернулли*.

Линейное дифференциальное уравнение можно решить одной-единственной заменой:

$y = uv$, где u и v – некоторые, **пока ещё неизвестные** функции, зависящие от «икс».

Коль скоро проводится замена $y = uv$, то нужно выяснить, чему равна производная. По правилу дифференцирования произведения: $y' = u'v + uv'$

Подставляем $y = uv$ и $y' = u'v + uv'$ в наше уравнение $y' - y = e^x$: $u'v + uv' - uv = e^x$

В чём состоит задача? Необходимо найти неизвестные функции *u* и *v*, которые зависят от «икс». И как раз этому будут посвящены все последующие действия.

После подстановки смотрим на два слагаемых, которые располагаются вот на этих местах: $u'v + \boxed{uv' - uv} = e^x$

У них нужно вынести за скобки всё, что можно вынести. В данном случае: $u'v + u(v' - v) = e^x$

Теперь нужно составить систему уравнений. Система составляется стандартно:

Приравниваем к нулю то, что находится в скобках: $v' - v = 0$.

Если $v' - v = 0$, тогда из нашего уравнения

$u'v + u(v' - v) = e^x$ получаем: $u'v + u \cdot 0 = e^x$ или просто $u'v = e^x$.

Уравнения записываем в систему:

$$\begin{cases} v' - v = 0 \\ u'v = e^x \end{cases}.$$

Именно в таком порядке.

Система опять же решается стандартно.

Сначала **из первого уравнения находим функцию v.** Это простейшее уравнение с разделяющимися переменными.

$$v' - v = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = v$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int dx$$

$$\ln|v| = x$$

$$v = e^x$$

Функция v найдена. Обратите внимание, что константу C на данном этапе мы <u>не приписываем</u>.

Далее **подставляем найденную функцию** $v = e^x$ **во второе уравнение системы** $u'v = e^x$:

$$u' \cdot e^x = e^x$$

Тут экспоненты сокращаются и получается дифференциальное уравнение: $u' = 1$

Из этого уравнения находим функцию u.

$$u' = 1$$

$$\frac{du}{dx} = 1$$

$$u = \int dx = x + C$$

Функция u найдена. А вот здесь уже добавляем константу C.

Вспоминаем обозначение в начале решения: $y = uv$.

Обе функции найдены:

$$v = e^x$$

$$u = x + C$$

Записываем общее решение:

$y = uv = (x + C) \cdot e^x$, где $C = const$

В ответе можно раскрыть скобки:

Ответ: общее решение $y = Ce^x + xe^x$, где $C = const$

Пример 2

Найти общее решение дифференциального уравнения $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

Решение: Данное уравнение имеет «классический» вид $y' + p(x) \cdot y = q(x)$ линейного уравнения.

Проведем замену: $y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$ и подставим $y = uv$ и $y' = u'v + uv'$ в исходное уравнение $y' + 2xy = xe^{-x^2}$:

$u'v + uv' + 2xuv = xe^{-x^2}$

После подстановки проведем вынесение множителя за скобки:

$u'v + u(v' + 2xv) = xe^{-x^2}$

Составляем систему. Для этого приравниванием к нулю то, что находится в скобках: $v' + 2xv = 0$, автоматически получая и второе уравнение системы: $u'v + u \cdot 0 = xe^{-x^2}$

$u'v = xe^{-x^2}$

В результате:

$$\begin{cases} v' + 2xv = 0 \\ u'v = xe^{-x^2} \end{cases}.$$

Из первого уравнения найдем функцию v:

$\frac{dv}{dx} = -2xv$

$\frac{dv}{v} = -2xdx$

$\int \frac{dv}{v} = -2\int xdx$

$\ln|v| = -x^2$

$v = e^{-x^2}$ – найденную функцию v подставим во второе уравнение системы $u'v = xe^{-x^2}$:

$u' \cdot e^{-x^2} = xe^{-x^2}$

Теперь находим функцию u . Уравнение опять получилось простенькое:

$\frac{du}{dx} = x$

$u = \int xdx = \frac{x^2}{2} + C$

Обе функции найдены:

$v = e^{-x^2}$

$u = \frac{x^2}{2} + C$

Таким образом:

$$y = uv = \left(\frac{x^2}{2} + C\right) \cdot e^{-x^2}$$

Общее решение:

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right) \cdot e^{-x^2}, \text{ где } C = const$$

Ответ: общее решение:

Пример **3:** Решить уравнение

$y' + \frac{2}{x} y = x^3$

Решение:

В этом линейном уравнении $P = \frac{2}{x}, \cdot Q = x^3$. Пусть $y=uv$, тогда

$y' = \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ Подставим в данное уравнение вместо y и y` их выражения, получаем

$\left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right) + \frac{2}{x}uv = x^3$; $\left(\frac{dv}{dx} + \frac{2}{x}v\right)u + v\frac{du}{dx} = x^3$; $\frac{dv}{dx} + \frac{2}{x}v = 0$

$\frac{dv}{dx} = -2\frac{v}{x}$

$\frac{dv}{v} = -2\frac{dx}{x}$

$\int \frac{dv}{v} = -2\int \frac{dx}{x}$

$Lnv = Ln\frac{1}{x^2} + LnC$

$v = \frac{C}{x^2}$, откуда при С=1, получаем частное решение: $v = \frac{1}{x^2}$

Заменим v и коэффициент при u нулём

$0 \cdot u + \frac{1}{x^2}\frac{du}{dx} = x^3$

$du = x^5 dx$, $u = \frac{1}{6}x^6 + C$

Подставим в равенство $y=uv$ вместо u и v их найденные выражения, получаем общее решение данного линейного дифференциального уравнения:

$y = \left(\frac{1}{6}x^6 + C\right) \cdot \frac{1}{x^2}$ или $y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{C}{x^2}$ общее решение уравнения.

Пример 4. Скорость v, путь s и время t связаны уравнением $v\cos t + s\sin t = 1$. Найти закон движения, если при t = 0   s = 2.

Решение:

Так как $v = \frac{ds}{dt}$, то подставляя это значение v в данное уравнение, получаем дифференциальное уравнение движения:

$$\frac{ds}{dt}\cos + s\sin t = 1$$

или $\frac{ds}{dt} + s\frac{\sin t}{\cos t} = \frac{1}{\cos t}$ - это линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

Решим его методом Бернулли, применив подстановку $s = uv$, где $u = u(t)$, $v = v(t)$;

$s' = u'v + uv'$, получаем $u'v + uv' + uv\cdot\frac{\sin t}{\cos t} = \frac{1}{\cos t}$;

Сгруппировав члены, содержащие u и вынеся за скобки общий множитель, получим

$u(v' + v\cdot\frac{\sin t}{\cos t}) + u'v = \frac{1}{\cos t}$;

Выражение в скобках приравняем к нулю:

$$v' + v\cdot\frac{\sin t}{\cos t} = 0;$$

$$\frac{dv}{dt} = -v\cdot\frac{\sin t}{\cos t};$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{\sin t dt}{\cos t};$$

$$\int\frac{dv}{v} = \int\frac{d(\cos t)}{\cos t};$$

$$\ln v = \ln\cos t;$$

$$v = \cos t;$$

Для отыскания u имеем уравнение:

$$u'v = \frac{1}{\cos t};$$

$$\frac{du}{dt}\cos t = \frac{1}{\cos t};$$

$$\int du = \int\frac{dt}{\cos^2 t};$$

$$u = tgt + C;$$

$$s = u\cdot v = (tgt + C)\cos t = \frac{\sin t}{\cos t}\cdot\cos t + C\cdot\cos t = \sin t + C\cdot\cos t$$

По условию при t=0   s=2 и поэтому C=2. Таким образом, искомый закон движения $s = \sin t + 2\cos t$.