<u>Тема:</u> Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

1. **Изучить теоретический материал, составить конспект (записать определения, примеры).**

На данном уроке мы рассмотрим так называемые **однородные дифференциальные уравнения первого порядка**.

Дифференциальное уравнение первого порядка, имеющее вид *P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0,* где *P* и *Q*– однородные функции *x* и *y* одинаковой степени, называется *однородным дифференциальным уравнением первого порядка*.

Так как многие принципы решения однородных уравнений и используемые технические приемы будут точно такими же, как и для простейших уравнений с разделяющимися переменными, то советую повторить материал урока от 24.03.21.

В чём отличие однородных дифференциальных уравнений от других типов ДУ? Это проще всего сразу же пояснить на конкретном примере.

<u>Пример 1.</u> Решить дифференциальное уравнение $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$

Решение:

Что **в первую очередь** следует проанализировать при решении **любого** дифференциального уравнения **первого порядка**? В первую очередь необходимо проверить, а нельзя ли сразу разделить переменные с помощью «школьных» действий? Обычно такой анализ проводят мысленно или пытаются разделить переменные на черновике.

В данном примере **переменные разделить нельзя** (можете попробовать поперекидывать слагаемые из части в часть, повыносить множители за скобки и т.д.). Кстати, в данном примере, тот факт, что переменные разделить нельзя, достаточно очевиден ввиду наличия множителя $e^{\frac{y}{x}}$.

Нужно проверить, а **не является ли данное уравнение однородным**? Проверка несложная, и сам алгоритм проверки можно сформулировать так:

В исходное уравнение:

вместо x подставляем λx, **вместо** y подставляем λy, **производную не трогаем**:

$$\lambda x \cdot y' = \lambda y - \lambda x e^{\frac{\lambda y}{\lambda x}}$$

Буква лямбда – это условный параметр, и здесь он играет следующую роль: если в результате преобразований удастся «уничтожить» ВСЕ лямбды и получить исходное уравнение, то данное дифференциальное уравнение **является однородным**.

Очевидно, что лямбды сразу сокращаются в показателе степени:

$\lambda x \cdot y' = \lambda y - \lambda x e^{\frac{y}{x}}$

Теперь в правой части выносим лямбду за скобки:

$\lambda x \cdot y' = \lambda(y - x e^{\frac{y}{x}})$

и обе части делим на эту самую лямбду:

$xy' = y - x e^{\frac{y}{x}}$

В результате **все** лямбды исчезли, и мы получили исходное уравнение.

Вывод: Данное уравнение является однородным

Можно проводить рассмотренную проверку на черновике.

Как решить однородное дифференциальное уравнение?

Абсолютно все однородные уравнения можно решить с помощью одной-единственной стандартной замены.

Функцию «игрек» следует **заменить произведением** некоторой функции t *(тоже зависящей от «икс»)* и «икса»:

$y = t(x) \cdot x$, почти всегда пишут коротко: $y = tx$

Выясняем, во что превратится производная y' при такой замене, используем правило дифференцирования произведения. Если $y = tx$, то:
$y' = (tx)' = (t)'x + t(x)' = t'x + t$

Подставляем $y = tx$ и $y' = t'x + t$ в исходное уравнение $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$:

$x(t'x + t) = tx - xe^{\frac{tx}{x}}$

Что даст такая замена? После данной замены и проведенных упрощений мы

гарантировано получим уравнение с разделяющимися переменными.

ЗАПОМИНАЕМ $y = tx$ и, соответственно, $y' = t'x + t$.

После подстановки проводим максимальные упрощения:
$x(t'x + t) = x(t - e^t)$
$t'x + t = t - e^t$
$t'x = -e^t$

Далее решаем **уравнение с разделяющимися переменными**.

Поскольку t – это функция, зависящая от «икс», то её производную можно записать стандартной дробью: $t' = \frac{dt}{dx}$.
Таким образом:

$$x\frac{dt}{dx} = -e^{t}$$

Разделяем переменные, при этом в левой части нужно собрать только «тэ», а в правой части – только «иксы»:

$$-e^{-t}dt = \frac{dx}{x}$$

Переменные разделены, интегрируем:

$$-\int e^{-t}dt = \int\frac{dx}{x}$$

$$e^{-t} = \ln|x| + \ln|C|$$

(Константу во многих случаях целесообразно «оформить» в виде логарифма.)

После того, как уравнение проинтегрировано, нужно провести *обратную замену*, она тоже стандартна и единственна:

Если $y = tx$, то $t = \frac{y}{x}$

В данном случае: $e^{-\frac{y}{x}} = \ln|Cx|$

Ответ: общий интеграл: $e^{-\frac{y}{x}} = \ln|Cx|$, где $C = const$

Пример 2: Проверить уравнение на однородность и найти его общий интеграл.

$$xy' - y = xtg\frac{y}{x}$$

Решение: проверим уравнение на однородность, для этого в исходное уравнение **вместо** x подставим λx, а **вместо** y подставим λy:

$$\lambda xy' - \lambda y = \lambda xtg\frac{\lambda y}{\lambda x}$$

$$\lambda(xy' - y) = \lambda xtg\frac{y}{x}$$

$$xy' - y = xtg\frac{y}{x}$$

В результате получено исходное уравнение, значит, данное ДУ является однородным.

Проведем замену: $y = tx \Rightarrow y' = t'x + t$
Подставим $y = tx$ и $t'x + t$ в исходное уравнение:

$$x(t'x+t)-tx=xtg\frac{tx}{x}$$

$$t'x+t-t=tgt$$

$$x\frac{dt}{dx}=\frac{\sin t}{\cos t}$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{\cos t dt}{\sin t}=\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{d(\sin t)}{\sin t}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|\sin t|=\ln|x|+\ln|C|$$

Перед обратной заменой результат целесообразно упростить:

$$\ln|\sin t|=\ln|Cx|$$

$$\sin t=Cx$$

Обратная замена $t=\dfrac{y}{x}$:

$$\sin\frac{y}{x}=Cx$$

Ответ: общий интеграл: $\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{y}{x}=C,\ где\ \ C=const$

Пример 3: Проверить уравнение на однородность и найти его общий интеграл.

$$xy'-y=xtg\frac{y}{x}$$

Решение: Проверим уравнение на однородность:

$$(\lambda y)^2+(\lambda x)^2y'=\lambda x\cdot\lambda yy'$$

$$\lambda^2y^2+\lambda^2x^2y'=\lambda^2xyy'$$

$$\lambda^2(y^2+x^2y')=\lambda^2xyy'$$

$$y^2+x^2y'=xyy'$$

Таким образом, данное уравнение является однородным.
Проведем замену:

$$y=tx\Rightarrow dy=t'x+t$$

$$t^2x^2+x^2(t'x+t)=x\cdot tx(t'x+t)$$

После подстановки проводим максимальные упрощения:

$$t^2+t'x+t=t'tx+t^2$$

$$t'x+t=t'tx$$

$$t'tx-t'x=t$$

$$(tx-x)t'=t$$

$$x(t-1)t'=t$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$x(t-1)\frac{dt}{dx}=t$$

$$\frac{(t-1)dt}{t}=\frac{dx}{x}$$

Контроль:

$x=0$ *– не является решением уравнения* $y^2+x^2y'=xyy'$,

а вот $t=\frac{y}{x}=0 \quad \Rightarrow \quad y=0$*, очевидно, является.*

Интегрируем:

$$\int\left(1-\frac{1}{t}\right)dt=\int\frac{dx}{x}$$

$$t-\ln|t|=\ln|x|+C$$

и перед обратной заменой записываем уравнение как можно компактнее:

$$t-\ln|t|-\ln|x|=C$$

$$t-(\ln|t|+\ln|x|)=C$$

$$t-\ln|tx|=C$$

Проведём обратную замену $t=\frac{y}{x}$:

$$\frac{y}{x}-\ln\left|\frac{y}{x}\cdot x\right|=C$$

$$\frac{y}{x}-\ln|y|=C$$

Решение $y=0$ в общий интеграл не вошло, и поэтому его следует дополнительно прописать в ***ответе***:

общий интеграл: $\frac{y}{x}-\ln|y|=C, \text{ где } C=const$. Ещё одно решение: $y=0$

<u>Пример 4:</u> Решить уравнение $y^2dx+(x^2-xy)dy=0$

Решение:

Пусть $\frac{y}{x}=t, т.е. \cdot y=tx$, тогда $dy=tdx+xdt$. Подставляем эти выражения *y* и *dy* в данное уравнение:

$$(tx)^2dx+(x^2-x\cdot tx)(tdx+xdt)=0$$

$$tx^2dx+x^3(1-t)dt=0$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{(1-t)dt}{t}=0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dt}{t} - \int dt = 0$$

$$Lnx + Lnt - t + C = 0$$

$$Lnx + Lnt - Lne^t + LnC = 0$$

$$Lnx \cdot t = Lne^t \cdot C$$

$$x \cdot t = e^t \cdot C$$

$$x \cdot \frac{y}{x} = e^{\frac{y}{x}} \cdot C$$

$y = Ce^{\frac{y}{x}}$ - общее решение уравнения.