<u>Тема:</u> Предмет дискретной математики, ее место и роль в системе математических наук. Элементы теории множеств.

1. **Изучить теорию. Составить краткий конспект (записать определения, примеры, выполнить чертежи).**

Дискретная математика остается наиболее динамичной областью знаний. Сегодня наиболее значимой областью применения дискретной математики является область компьютерных технологий. Модели и методы дискретной математики являются хорошим средством и языком для построения и анализа моделей в различных науках. Язык дискретной математики стал фактически метаязыком всей современной математики.

Дискретная математика - это область математики, изучающая объекты, которые могут принимать только уникальные отдельные значения.

Дискретная математика представляет собой область математики, в которой изучаются свойства структур конечного характера, а также бесконечных структур, предполагающих скачкообразность происходящих в них процессов или отделимость составляющих их элементов. К классической же математике относится все, что явно или неявно содержит идеи теории пределов и непрерывности. На грани дискретной математики и программирования появляются новые дисциплины, такие как анализ вычислительных алгоритмов, логическое программирование, комбинаторные алгоритмы, алгоритмизация процессов и др.

Сегодня мы рассмотрим один из разделов дискретной математики – теорию множеств.

Множество. Примеры множеств

Множество – это фундаментальное понятие не только математики, но и всего окружающего мира. Возьмите прямо сейчас в руку любой предмет. Вот вам и множество, состоящее из одного элемента.

В широком смысле, **множество – это совокупность объектов (элементов), которые понимаются как единое целое** (по тем или иным признакам, критериям или обстоятельствам). Причём, это не только материальные объекты, но и буквы, цифры, теоремы, мысли, эмоции и т.д.

Обычно множества обозначаются большими латинскими буквами $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$ *(как вариант, с подстрочными индексами:* A_1, A_2, B_7 *и т.п.)*, а его элементы записываются в фигурных скобках, например:

$A = \{а, б, в, \ldots, э, ю, я\}$ – множество букв русского алфавита;

$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ – множество натуральных чисел;

$S_1 = \{Аня, Ваня, Таня, Петя, Юля, Галя\}$ – множество студентов в 1-м ряду

Множества A и S_1 являются *конечными* (состоящими из конечного числа элементов), а множество N – это пример *бесконечного* множества. Кроме того, в теории и на практике рассматривается так называемое *пустое множество*:

$\varnothing$ – множество, в котором нет ни одного элемента.

Принадлежность элемента множеству записывается значком $\in$, например:

$б \in A$ – буква «бэ» принадлежит множеству букв русского алфавита;
$\beta \notin A$ – буква «бета» **не** принадлежит множеству букв русского алфавита;
$5 \in N$ – число 5 принадлежит множеству натуральных чисел;
$5{,}5 \notin N$ – а вот число 5,5 – уже нет;
$Вольдемар \notin S_1$ – Вольдемар не сидит в первом ряду (и тем более, не принадлежит множеству A или N).

В абстрактной алгебре элементы множества обозначают маленькими латинскими буквами $a, b, c, \ldots, x, y, z$ и, соответственно, факт принадлежности оформляется в следующем стиле:

$x \in X$ – элемент x принадлежит множеству X.

Вышеприведённые множества записаны *прямым перечислением* элементов, но это не единственный способ. Многие множества удобно определять с помощью некоторого *признака (ов)*, который присущ <u>всем его элементам</u>. Например:

$N^* = \{n \in N \mid n < 100\}$ – множество всех натуральных чисел, меньших ста.

<u>Запомните</u>: длинная вертикальная палка $\mid$ выражает словесный оборот «которые», «таких, что». Довольно часто вместо неё используется двоеточие: $N^* = \{n \in N : n < 100\}$ – давайте прочитаем запись более формально: *«множество элементов n, принадлежащих множеству N натуральных чисел,* ***таких, что*** $n < 100$*»*. Данное множество можно записать и прямым перечислением:

$N^* = \{1, 2, 3, \ldots, 97, 98, 99\}$

Ещё примеры:

$S_1 = \{Студенты \mid занимают\ место\ в\ 1\ ряду\}$ – и если студентов в 1-м ряду достаточно много, то такая запись намного удобнее, нежели их прямое перечисление.

$O=\{x \mid 0 \le x \le 1\}$ – множество чисел, принадлежащих отрезку $[0;1]$. Обратите внимание, что здесь подразумевается множество *действительных* чисел , которые перечислить через запятую уже невозможно.

Следует отметить, что элементы множества не обязаны быть «однородными» или логически взаимосвязанными. Возьмите большой пакет и начните наобум складывать в него различные предметы. В этом нет никакой закономерности, но, тем не менее, речь идёт о множестве предметов. Образно говоря, множество – это и есть обособленный «пакет», в котором «волею судьбы» оказалась некоторая совокупность объектов.

Подмножества

Практически всё понятно из самого названия: **множество G является подмножеством множества A, если каждый элемент множества G принадлежит множеству A.**

Иными словами, множество G содержится во множестве A: $G \subset A$

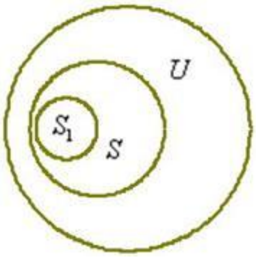
Значок $\subset$ называют значком *включения*.

Вернёмся к примеру, в котором A – это множество букв русского алфавита. Обозначим через G – множество его гласных букв. Тогда: $G \subset A$

Также можно выделить подмножество согласных букв и вообще – произвольное подмножество, состоящее из любого количества случайно (или неслучайно) взятых кириллических букв. В частности, любая буква кириллицы является подмножеством множества A.

Отношения между подмножествами удобно изображать с помощью условной геометрической схемы, которая называется ***кругами Эйлера.***

Пусть S_1 – множество студентов в 1-м ряду, S – множество студентов группы, U – множество студентов колледжа. Тогда отношение включений $S_1 \subset S \subset U$ можно изобразить следующим образом:



Множество студентов другого колледжа следует изобразить кругом, который не пересекает внешний круг; множество студентов страны – кругом, который содержит в себе оба этих круга, и т.д.

Типичный пример включений мы наблюдаем при рассмотрении числовых множеств.

Числовые множества

Как известно, исторически первыми появились натуральные числа, предназначенные для подсчёта материальных объектов (людей, кур, овец, монет и т.д.). Числовые множества принято обозначать жирными, стилизованными или утолщёнными буквами.

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Иногда к множеству натуральных чисел относят ноль.

Если к множеству $\mathbf{N}$ присоединить те же числа с противоположным знаком и ноль, то получится *множество целых чисел*:

$\mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, или $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$

Совершенно понятно, что множество натуральных чисел является подмножеством множества целых чисел:

$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$ – поскольку каждый элемент множества $\mathbf{N}$ принадлежит множеству $\mathbf{Z}$. Таким образом, любое натуральное число можно смело назвать и целым числом.

Следующим числовым множеством идёт *множество рациональных чисел*: $\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N} \right\}$ – то есть, любое рациональное число представимо в виде дроби $\frac{m}{n}$ с целым *числителем* и натуральным *знаменателем*.

Очевидно, что множество целых чисел является *подмножеством* множества рациональных чисел:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$$

И в самом деле – ведь любое целое число можно представить в виде рациональной дроби $\frac{m}{n}$, например: $-2 = \frac{-2}{1}$, $5 = \frac{5}{1}$ и т.д. Таким образом, целое число можно совершенно законно назвать и рациональным числом.

Помимо рациональных существует множество $\mathbf{I}$ иррациональных чисел, каждое из которых представимо в виде бесконечной *НЕпериодической* десятичной дроби. Иными словами, в «бесконечных хвостах» иррациональных чисел нет никакой закономерности:

$\pi = 3{,}1415926535\dots$

$e = 2{,}7182818284\dots$

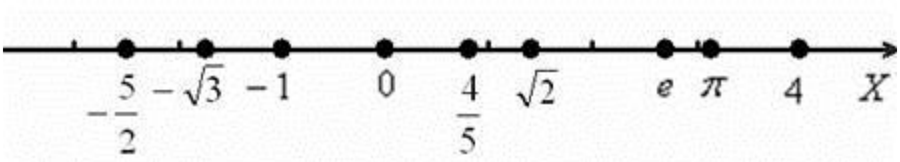
$\sqrt{2} = 1{,}414213562\dots$

Объединение рациональных и иррациональных чисел образует *множество действительных (вещественных) чисел*:

$$\mathbf{Q} \cup \mathbf{I} = \mathbf{R}$$

$\cup$ – значок *объединения* множеств.

Геометрическая интерпретация множества $\mathbf{R}$ вам хорошо знакома – это числовая прямая:



Каждому действительному числу соответствует определённая точка числовой прямой, и наоборот – каждой точке числовой прямой обязательно соответствует некоторое действительное число.

Числовую прямую также обозначают бесконечным интервалом $(-\infty; +\infty)$, а запись $x \in (-\infty; +\infty)$ или эквивалентная ей запись $x \in \mathbf{R}$ символизирует тот факт, что x принадлежит множеству действительных чисел *(или попросту «икс» – действительное число)*.

С вложениями всё прозрачно: множество рациональных чисел – это *подмножество* множества действительных чисел: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$, таким образом, любое рациональное число можно смело назвать и действительным числом.

Множество иррациональных чисел – это тоже *подмножество* действительных чисел:
$\mathbf{I} \subset \mathbf{R}$

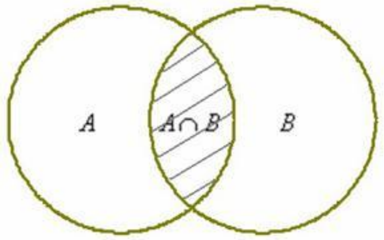
При этом подмножества $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{I}$ *не пересекаются* – то есть ни одно иррациональное число невозможно представить в виде $\frac{m}{n}$ рациональной дроби.

Действия над множествами. Диаграммы Венна

Диаграммы Венна (по аналогии с кругами Эйлера) – это схематическое изображение действий с множествами.

1) **Пересечение** множеств характеризуется логической связкой **И** и обозначается значком $\cap$

Пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B$, каждый элемент которого принадлежит и множеству A, и множеству B. Грубо говоря, пересечение – это общая часть множеств:



Так, например, для множеств $A = \{i, j, k\}, B = \{k, m\}$:
$A \cap B = \{k\}$

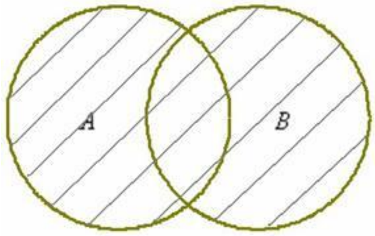
Если у множеств нет одинаковых элементов, то их пересечение пусто. Такой пример нам только что встретился при рассмотрении числовых множеств: $\mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \varnothing$

Множества рациональных и иррациональных чисел можно схематически изобразить двумя непересекающимися кругами.

Операция пересечения применима и для бОльшего количества множеств.

2) Объединение множеств характеризуется логической связкой ИЛИ и обозначается значком $\cup$

Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B$, каждый элемент которого принадлежит множеству A или множеству B:



Запишем объединение множеств $A = \{1, 3, 5\}, B = \{-1, 0, 1\}$: $A \cup B = \{-1, 0, 1, 3, 5\}$ – грубо говоря, тут нужно перечислить все элементы множеств A и B, причём одинаковые элементы *(в данном случае единица на пересечении множеств)* следует указать один раз.

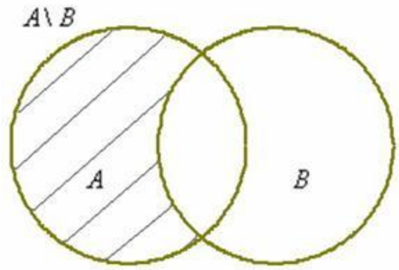
Но множества, разумеется, могут и не пересекаться, как это имеет место быть с рациональными и иррациональными числами: $\mathbf{Q} \cup \mathbf{I} = \mathbf{R}$

В этом случае можно изобразить два непересекающихся заштрихованных круга.

Операция объединения применима и для бОльшего количества множеств, например, если $A = \{1, 2\}, B = \{0, 7\}, C = \{-10, -3\}$, то:

$A \cup B \cup C = \{-10, -3, 0, 1, 2, 7\}$, при этом числа вовсе не обязательно располагать в порядке возрастания . Не мудрствуя лукаво, результат можно записать и так: $A \cup B \cup C = \{1, 2, 0, 7, -10, -3\}$

3) **Разностью множеств A и B называют множество $A \setminus B$, каждый элемент которого принадлежит множеству A и не принадлежит множеству B:**

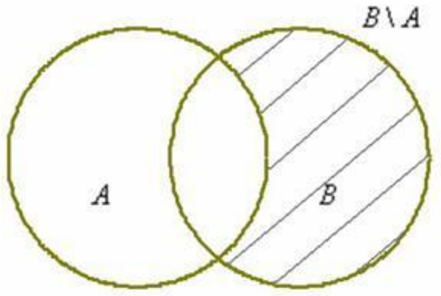


Разность $A \setminus B$ читаются следующим образом: «а без бэ». И рассуждать можно точно так же: рассмотрим множества $A=\{a,b,c,d\}, B=\{1,a,d,5\}$. Чтобы записать разность $A\setminus B$, нужно из множества A «выбросить» все элементы, которые есть во множестве B:

$A\setminus B=\{b,c\}$

Пример с числовыми множествами: $\mathbf{Z}\setminus\mathbf{N}=\{\dots,-3,-2,-1,0\}$ – здесь из множества целых чисел исключены все натуральные, да и сама запись $\mathbf{Z}\setminus\mathbf{N}$ так и читается: «множество целых чисел без множества натуральных».

Зеркально: **разностью** множеств B и A называют множество $B\setminus A$, каждый элемент которого принадлежит множеству B **и** не принадлежит множеству A:



Для тех же множеств $A=\{a,b,c,d\}, B=\{1,a,d,5\}$

$B\setminus A=\{1,5\}$ – из множества B «выброшено» то, что есть во множестве A.

А вот эта разность оказывается пуста: $\mathbf{N}\setminus\mathbf{Z}=\varnothing$. И в самом деле – если из множества натуральных чисел исключить целые числа, то, собственно, ничего и не останется :)

4) Декартовым (прямым) произведением множеств A и B называется множество $A\times B$ всех <u>упорядоченных</u> пар (a,b), в которых элемент $a\in A$, а элемент $b\in B$

Запишем декартово произведение множеств $A=\{d,5,f\}, B=\{-1,d\}$:

$A\times B=\{(d,-1),(d,d),(5,-1),(5,d),(f,-1),(f,d)\}$ – перечисление пар удобно осуществлять по следующему алгоритму: «сначала к 1-му элементу множества A последовательно присоединяем каждый элемент множества B, затем ко 2-му элементу множества A присоединяем каждый элемент множества B, затем к 3-му элементу множества A присоединяем каждый элемент множества B»:

$$A\times B=\{(\underline{d},\boxed{-1}),(\underline{d},\boxed{d}),(\underline{5},-1),(\underline{5},d),(\underline{f},-1),(\underline{f},d)\}$$

Напоминаю, что квадратная скобка означает *включение* числа в промежуток, а круглая – его *невключение*, то есть «минус единица» принадлежит множеству B, а «тройка» **не** принадлежит множеству A.

Решение заданий:

***Задание 1*. Даны два множества A и B. Найти их пересечение, объединение, разности и декартовы произведения.**

1) $A = \{a, 1, 2\}, B = \{a, b, 1\}$

$A \cap B = \{a, 1\}$

$A \cup B = \{a, b, 1, 2\}$

$A \setminus B = \{2\}$

$B \setminus A = \{b\}$

$A \times B = \{(a, a), (a, b), (a, 1), (1, a), (1, b), (1, 1), (2, a), (2, b), (2, 1)\}$

$B \times A = \{(a, a), (a, 1), (a, 2), (b, a), (b, 1), (b, 2), (1, a), (1, 1), (1, 2)\}$

3) $A = (-\infty; 3), B = [-1; +\infty)$

$A \cap B = [-1; 3)$

$A \cup B = (-\infty; +\infty)$

$A \setminus B = (-\infty; -1)$

$B \setminus A = [3; +\infty)$

$A \times B = \{(x; y) \mid x < 3, y \geq -1\}$ – все точки (x, y) координатной плоскости XOY, удовлетворяющие двум указанным неравенствам. Аналогично: $B \times A = \{(x; y) \mid x \geq -1, y < 3\}$

***Задание 2*.**

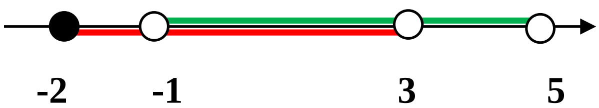
1. Пусть A и B – два множества чисел:
   A = {-3, -2, 0, 2, 3, 4, 5}; B = {-2, -1, 0, 1, 3, 5, 7}.
   Найдите множества A∪B, A∩B и A\B.

Решение: A∪B = {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7} (нужно перечислить все элементы множеств A и B, причём одинаковые элементы *(в данном случае -2, 0, 3, 5)* следует указать один раз.

A∩B = {-2, 0, 3, 5} (нужно перечислить элементы, принадлежащие **и** тому **и** другому множествам)

A\B = {-3, -1, 1, 2, 4, 7} (из множества A «выбросить» все элементы, которые есть во множестве B).

2. Пусть A и B – два множества чисел: A = (-1;5); B = [-2; 3).
   Найдите множества A∪B, A∩B.

Решение: 

A∪B = [-2; 5); A∩B = (-1;3)

2. Выполнить практическую работу по вариантам (руководствоваться решением ***задания 2***).

Вариант 1

3. Пусть A и B – два множества чисел:
   A = {-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4}; B = {-3, -1, 0, 1, 3, 5, 7}.
   Найдите множества $A \cup B$, $A \cap B$ и $A \setminus B$.

4. Пусть A и B – два множества чисел:
   A = (-2;4); B = [-3,2).
   Найдите множества $A \cup B$, $A \cap B$.

Вариант 2

1. Пусть A и B – два множества чисел:
   A = {-3, -2, 0, 1, 2, 3}; B = { -1, 0, 2, 3, 4, 6}.
   Найдите множества $A \cup B$, $A \cap B$ и $A \setminus B$.

2. Пусть A и B – два множества чисел:
   A = (-3;2); B = [-3,6).
   Найдите множества $A \cup B$, $A \cap B$.

Вариант 3

1. Пусть A и B – два множества чисел:
   A = {-4, -3, -1, 0, 1}; B = { -1, 0, 1, 2, 3, 4}.
   Найдите множества $A \cup B$, $A \cap B$ и $A \setminus B$.

2. Пусть A и B – два множества чисел:
   A = (-4;4); B = [-2,5).
   Найдите множества $A \cup B$, $A \cap B$.

Вариант 4

1. Пусть A и B – два множества чисел:
   A = {-2, -1, 0, 2, 4, 6}; B = {-3, -2, 0, 1, 2, 5, 7}.
   Найдите множества $A \cup B$, $A \cap B$ и $A \setminus B$.

2. Пусть A и B – два множества чисел:
   A = (-3;3); B = [-3,5).
   Найдите множества $A \cup B$, $A \cap B$.

Вариант 5

1. Пусть A и B – два множества чисел:
   $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 4\}$; $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 4, 5\}$.
   Найдите множества $A \cup B$, $A \cap B$ и $A \setminus B$.

2. Пусть A и B – два множества чисел:
   $A = (-5;2)$; $B = [-3,2]$.
   Найдите множества $A \cup B$, $A \cap B$.

Вариант 6

1. Пусть A и B – два множества чисел:
   $A = \{-6, -4, 0, 1, 3, 4, 5\}$; $B = \{-5, -4, 0, 1, 3, 5, 6, 7\}$.
   Найдите множества $A \cup B$, $A \cap B$ и $A \setminus B$.

2. Пусть A и B – два множества чисел:
   $A = (-6;3)$; $B = [-6,3]$.
   Найдите множества $A \cup B$, $A \cap B$.

1 вариант	Баганов К., Бублик В, Киселев А.
2 вариант	Козлов М., Мехоношина В., Молодцова А.
3 вариант	Силантьев К., Фатуллаев Р., Федотов Н.
4 вариант	Филиппова К., Щекоткин Д., Крайнов А.
5 вариант	Ипполитов Е., Князев А., Мухин М., Нестеров А.
6 вариант	Осипов А., Царев Н., Тюленев Д., Штанько А.

Все практические работы выполнить на отдельных листках (оформлять аккуратно, разборчивым почерком) сфотографировать и отправить на электронную почту: **olga.georg.gor@yandex.ru**