<u>Тема:</u> Функциональные и степенные ряды

1. ***Изучить теоретический материал. составить краткий конспект.***

Функциональные ряды

Обычный [числовой ряд]состоит из чисел:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots$$

Все члены ряда $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$ – это **ЧИСЛА**.

Функциональный же ряд состоит из **ФУНКЦИЙ**:

<u>Определение 1.</u> Выражение вида $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$, **(1) где** $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$ **- некоторая последовательность функций, называется *функциональным рядом*.**

В общий член ряда $u_n(x)$ помимо многочленов, факториалов **непременно** входит «икс». Выглядит это, например, так: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{(n+1)\cdot 2^n}$. Как и числовой ряд, любой функциональный ряд можно расписать в развернутом виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{(n+1)\cdot 2^n} = \frac{\sin x}{2\cdot 2^1} + \frac{\sin x}{3\cdot 2^2} + \frac{\sin x}{4\cdot 2^3} + \frac{\sin x}{5\cdot 2^4} + \frac{\sin x}{6\cdot 2^5} + \dots$$

Как видите, все члены функционального ряда $u_1(x), u_2(x), u_3(x), u_4(x), u_5(x), \dots$ – это **функции**.

Если в ряде (1) положить $x = x_0$, где x_0 – некоторое число, то получим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots$ (2)

<u>Определение 2.</u> Функциональный ряд (1) называется *сходящимся в точке x_0*, если числовой ряд (2), полученный из ряда (1) подстановкой $x = x_0$, является сходящимся рядом. При этом точка x_0 называется *точкой сходимости* ряда (1).

Пример . Функциональный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$ сходится в точке x = 1/2, так как ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$ сходится, и расходится в точке x = 2, потому что ряд $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n + \ldots$ расходится $\left(\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2^n = \infty \neq 0\right)$.

Определение 3. Множество всех точек сходимости функционального ряда (1) называется *областью сходимости ряда.*

Степенные ряды

Наиболее популярной разновидностью функционального ряда является **степенной ряд**. Членами степенного ряда являются целые положительные степени переменной x либо двучлена $(x-a)$ $(a = const)$, умноженные на числовые коэффициенты:

Определение. Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots, \quad (1)$$

где x – независимая переменная, x_0 – фиксированное число, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ - постоянные коэффициенты.

Например: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x+2)^n}{n^2} = 2(x+2) + \frac{2^2(x+2)^2}{2^2} + \frac{2^3(x+2)^3}{3^2} + \frac{2^4(x+2)^4}{4^2} + \frac{2^5(x+2)^5}{5^2} + \ldots$

Если произвести замену $x - x_0 = z$, то степенной ряд (1) примет вид

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$, следовательно, при изучении степенных рядов мы можем ограничиться степенными рядами вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \quad (2)$$

Например, ряд $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$ является степенным.

Еще примеры:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \frac{x^{10}}{5!} + \ldots$$

Сходимость степенного ряда.
Интервал сходимости, радиус сходимости и область сходимости

<u>Теорема</u> о структуре области сходимости степенного ряда. Пусть существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$. Тогда:

а) если $l \neq 0$ и $l \neq +\infty$, то степенной ряд (2) сходится в интервале $\left(-\dfrac{1}{l};\dfrac{1}{l}\right)$ и расходится вне этого интервала;

б) если $l = 0$, то ряд сходится при любом х;

в) если $l = +\infty$, то ряд сходится лишь при х=0.

<u>Пример.</u> Дан степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$.

Переменная x может принимать **любое действительное значение** от «минус бесконечности» до «плюс бесконечности». Подставим в общий член ряда несколько произвольных значений «икс»:

Если $x = 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1^n}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$

Если $x = -1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$

Если $x = 3$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n^2}$

Если $x = -\dfrac{1}{5}$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(-\dfrac{1}{5}\right)^n}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\dfrac{(-1)^n}{5^n}}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2\cdot 5^n}$

И так далее.

Очевидно, что, подставляя в $\dfrac{x^n}{n^2}$ то или иное значение «икс», мы получаем различные числовые ряды. Некоторые числовые ряды будут сходиться, а некоторые расходиться. И наша задача **найти множество значений «икс»**, при котором степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$ будет <u>сходиться</u>. Такое множество и называется **областью сходимости ряда**.

<u>Определение.</u> Число R называется *радиусом сходимости ряда* (2), если при всех x, для которых $|x| < R$, ряд сходится, а при всех x, для которых $|x| > R$, ряд расходится.

Радиус сходимости ряда (2) определяется по формуле $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$**.**

Таким образом, для области сходимости ряда (2) возможны следующие случаи:

1. Ряд (2) сходится только при x = 0. Область сходимости состоит из одной точки x = 0, R = 0.
2. Ряд (2) не имеет точек расходимости. Область сходимости совпадает со всей числовой прямой (-∞; +∞), R = +∞.
3. Ряд (2) имеет как отличные от нуля точки сходимости, так и точки расходимости. В зависимости от данного ряда область сходимости является одним из промежутков (-R; R), [-R;R), (-R;R], [-R;R].

<u>Определение.</u> Интервал (-R; R) называется *интервалом сходимости ряда.*

<u>Следствие.</u> Область сходимости степенного ряда либо совпадает с его интервалом сходимости, либо получается из этого интервала путем добавления одной или обеих граничных точек.

<u>Пример.</u> Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots\ .$$

Найдем n - ный, n+1 – вый члены и радиус сходимости ряда:

$a_n = \dfrac{1}{n}; a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}; R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1$, ряд сходится в интервале (-1; 1).

Исследуем сходимость ряда в концах интервала.

При ***a*** = -1 получаем знакочередующийся ряд $-1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}-\ldots+\dfrac{(-1)^n}{n}+\ldots$, который сходится по признаку Лейбница, так как $1 \geq \dfrac{1}{2} \geq \dfrac{1}{3} \geq \ldots \geq \dfrac{1}{n} \geq \ldots$ и

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$.

При ***a*** = 1 получаем гармонический ряд $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}+\ldots$, который расходится.

Итак, область сходимости данного ряда [- 1; 1).

Ряд Тейлора. Ряд Маклорена

Допустим, что функция f(x) разложена в степенной ряд в интервале (-R; R):

$$\boldsymbol{f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots} \qquad (1)$$

Если выразить коэффициенты ряда (1) через значения функции f(x) и ее производных в точке x_0, то получим ряд

$$f(x) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots , \qquad (2)$$

который называется ***рядом Тейлора функции f(x) в точке*** $\boldsymbol{x_0}$**.**

Если в ряде Тейлора (2) полагать $x_0 = 0$, то получим ряд

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots , \qquad (3)$$

который называется ***рядом Маклорена для функции f(x).***

Разложение некоторых функций в ряд Маклорена

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$ **(4)**

2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$ **(5)**

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$ **(6)**

4. $(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \ldots +$
$+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-(n-1))}{n!}x^n + \ldots$ **(7)**

5. $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \ldots$ **(8)**

6. $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots$ **(9)**

Формулы 4 – 9 записать в рабочую тетрадь!