<u>Тема:</u> Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Понятие о дифференциальном уравнении. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Общие и частные решения.

1. ***Изучить теоретический материал.***
2. ***Составить конспект (записать определения, примеры).***

1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

При изучении явлений природы, науки и техники приходится решать задачи, в которых устанавливается связь между самой переменной и функцией, переменной и ее производной.

1) Материальная точка движется со скоростью $\boldsymbol{v}$, пропорционально $\boldsymbol{t^2}$. Найти закон движения S=S(t).

   $\boldsymbol{v = S^{/}(t)}$

   Из условий задачи $\boldsymbol{v = k \cdot t^2}$, где $\boldsymbol{k}$ −коэффициент пропорциональности, следовательно, получаем $\boldsymbol{S' = kt^2}$ −дифференциальное уравнение.

2) Найти кривую, в каждой точке которой угловой коэффициент касательной равен удвоенной абсциссе соответствующей точки.

Если $y = f(x)$−искомая кривая, то из геометрического смысла производной следует, что $\boldsymbol{y' = 2x}$ −дифференциальное уравнение.

Замечание. Из дифференциального исчисления известно, что дифференциалы функции $dy = y'\,dx \Rightarrow y' = \dfrac{dy}{dx}$, т.е. производная равна отношению дифференциала функции к дифференциалу независимой переменной.

Следовательно, можно переписать дифференциальные уравнения в задачах 1) и 2):
к первому примеру: $\dfrac{dS}{dt} = kt^2$, ко второму примеру: $\dfrac{dy}{dx} = 2x$

3) (О потере заряда проводником). Изолированному проводнику сообщим заряд $Q_0 = 1000\,Кл$. Вследствие несовершенства изоляции проводник постепенно теряет свой заряд. Скорость потери заряда в данный момент времени пропорциональна наличному заряду проводника. Какой заряд останется на проводнике по истечении времени t = 10 мин., если за первую минуту потеряно 100 $Кл$?

Пусть в момент времени t заряд проводника равен Q. Тогда скорость потери заряда в этот момент времени равна - Q'. По условию задачи $-Q' = kQ$ или $Q' = -kQ$, где $k > 0$ – коэффициент пропорциональности.
$Q' = -kQ$ – это дифференциальное уравнение.

2. Понятие о дифференциальном уравнении.

Сначала вспомним обычные **алгебраические уравнения**. Они содержат переменные и числа. Простейший пример: $3x = 12$. Что значит решить обычное уравнение? Это значит, найти **множество чисел**, которые удовлетворяют данному уравнению. Легко заметить, что уравнение $3x = 12$ имеет единственный корень: $x = 4$

Дифференциальные уравнения устроены примерно так же!

Определение. ***Равенство,*** которое устанавливает зависимость между независимой переменной x, искомой функцией y и ее производной или дифференциалами, называется ***дифференциальным уравнением*.**

Дифференциальное уравнение *первого порядка* в общем случае **содержит**:
1) независимую переменную x;
2) зависимую переменную y (функцию);
3) первую производную функции: y'.

Определение. Функция $y = \varphi(x)$ называется решением уравнения, если при подстановке ее в это уравнение оно обращается в тождество относительно независимой переменной *x*.

Например, $y = e^x$ – является решением уравнения $y'' - y = 0$, т.к. $e^x - e^x = 0$ – верно.

Нетрудно проверить, что функция $y = c \cdot e^x$ также является решением дифференциального уравнения. Таким образом, данное уравнение имеет бесконечно много решений. Основная задача теории дифференциальных уравнений найти все решения данного дифференциального уравнения.

Что значит решить дифференциальное уравнение? Решить дифференциальное уравнение – это значит, найти **множество всех функций**, которые удовлетворяют данному уравнению. Такое множество функций имеет вид $y = f(x; C)$ (C – произвольная постоянная), который называется **общим решением дифференциального уравнения**.

3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Общие и частные решения.

Уравнения, в которых переменные разделяются, называются дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными.

Для того чтобы решить дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, нужно произвести разделение переменных, а затем взять интеграл от обеих частей.

<u>Пример 1</u>

Решить дифференциальное уравнение $xy' = y$

В первую очередь нужно переписать **производную** немного в другом виде. $y' = \frac{dy}{dx}$,
Итак:

$$x \cdot \frac{dy}{dx} = y$$

На втором шаге смотрим, нельзя ли **разделить переменные?** Что значит разделить переменные? Грубо говоря, **в левой части** нам нужно оставить **только «игреки»**, а **в правой части** организовать **только «иксы»**. Разделение переменных выполняется с помощью «школьных» манипуляций: вынесение за скобки, перенос слагаемых из части в часть со сменой знака, перенос множителей из части в часть по правилу пропорции и т.п.

Дифференциалы dy и dx – это полноправные множители. В рассматриваемом примере переменные легко разделяются перекидыванием множителей по правилу пропорции:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Переменные разделены. В левой части – только «игреки», в правой части – только «иксы».

Следующий этап – **интегрирование дифференциального уравнения**. Всё просто, приписываем интегралы к обеим частям:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

Разумеется, интегралы нужно взять. В данном случае они табличные:
$\ln|y| = \ln|x| + C$

Как мы помним, к любой **первообразной** приписывается константа. Здесь два интеграла, но константу C достаточно записать один раз *(т.к. константа + константа всё равно равна другой константе)*. В большинстве случаев её помещают в правую часть.

Строго говоря, после того, как взяты интегралы, дифференциальное уравнение считается решённым. Единственное, у нас «игрек» не выражен через «икс», то есть решение представлено *в неявном* виде. Решение дифференциального уравнения в неявном виде называется **общим интегралом дифференциального уравнения**. То есть, $\ln|y| = \ln|x| + C$ – это общий интеграл.

Ответ в такой форме вполне приемлем, но нет ли варианта получше? Давайте попытаемся получить **общее решение**.

Пожалуйста, **запомните первый технический приём**, он очень распространен и часто применяется в практических заданиях: *если в правой части после интегрирования появляется логарифм, то константу во многих случаях (но далеко не всегда!) целесообразно записать тоже под логарифмом. И записать НЕПРЕМЕННО, если получились одни логарифмы (как в рассматриваемом примере)*.

То есть, **ВМЕСТО** записи $\ln|y| = \ln|x| + C$ обычно пишут $\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|$.

Зачем это нужно? А для того, чтобы легче было выразить «игрек». Используем **свойство логарифмов** $\ln|a| + \ln|b| = \ln|ab|$. В данном случае:
$\ln|y| = \ln|Cx|$

Теперь логарифмы и **модули** можно убрать:
$y = Cx$

Функция представлена в явном виде. Это и есть общее решение.

Ответ: общее решение: $y = Cx$, где $C = const$.

<u>Пример 2</u>

Найти частное решение дифференциального уравнения $y' = -2y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 2$

Решение: по условию требуется найти **частное решение** дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию. Такая постановка вопроса также называется ***задачей Коши***.

Сначала находим общее решение. В уравнении нет переменной «икс», но это не должно смущать, главное, в нём есть первая производная.

Переписываем производную в нужном виде:
$$\frac{dy}{dx} = -2y$$

Очевидно, что переменные можно разделить:
$$\frac{dy}{y} = -2dx$$

Интегрируем уравнение:

$$\int \frac{dy}{y} = -2\int dx$$

$$\ln|y| = -2x + C^*$$

Общий интеграл получен. Здесь константа с надстрочной звездочкой, дело в том, что очень скоро она превратится в другую константу.

Теперь пробуем общий интеграл преобразовать в общее решение (выразить «игрек» в явном виде). Вспоминаем формулу: $\ln a = b \Rightarrow a = e^b$. В данном случае: $|y| = e^{-2x+C^*}$

Константу в показателе обычно спускают с небес на землю. Если подробно, то происходит это так. Используя свойство степеней, перепишем функцию следующим образом:

$$|y| = e^{C^*} \cdot e^{-2x}$$

Если C^* – это константа, то $e^{C^*} > 0$ – тоже некоторая константа, переобозначим её буквой C:

$y = Ce^{-2x}$ – при этом модуль убираем, после чего константа «цэ» сможет принимать как положительные, так и отрицательные значения

Итак, общее решение: $y = Ce^{-2x}$, где $C = const$.

На завершающем этапе нужно найти частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию $y(0) = 2$.

В чём состоит задача? Необходимо подобрать **такое** значение константы C, чтобы выполнялось условие $y(0) = 2$.

В общее решение вместо «икса» подставляем ноль, а вместо «игрека» двойку:

$$2 = Ce^{-2\cdot 0}$$

$$2 = Ce^0$$

$$2 = C \cdot 1$$

То есть, $C = 2$

Теперь в общее решение $y = Ce^{-2x}$ подставляем найденное значение константы $C = 2$:

$y = 2e^{-2x}$ – это и есть нужное нам частное решение.

Ответ: частное решение: $y = 2e^{-2x}$

Пример 3. Решить уравнение: $y' = \frac{ye^x}{1+e^x}$

Решение. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, так как его можно переписать в виде:

$$y' = y \cdot \frac{e^x}{1+e^x};\ f(x) = \frac{e^x}{1+e^x},\ g(y) = y.$$

Приведем его к уравнению с разделенными переменными:

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \frac{e^x}{1+e^x} \quad \Big| \cdot dx$$

$$dy = y \cdot \frac{e^x}{1+e^x} \cdot dx \quad \Big| : y \neq 0$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

Теперь его можно интегрировать:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

$$1) \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + c_1;\ 2) \int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int \frac{d(1+e^x)}{1+e^x} = \ln\left|1+e^x\right| + c_2$$

$\Rightarrow \ln|y| + c_1 = \ln\left|1+e^x\right| + c_2$, обозначим $c_2 - c_1 = \ln|c| \Rightarrow$

$$\ln|y| = \ln\left|1+e^x\right| + \ln|c| \Rightarrow y = c(1+e^x)$$

Получим общее решение уравнения.

***Ответ*:** $y = c(1+e^x)$.

Пример 4

Найти общее и частное решение уравнения, если *x=1, y=2*

$ydy - (1+2x)dx = 0$

Решение:

$ydy - (1+2x)dx = 0$

$ydy = (1+2x)dx$

$\int ydy = \int (1+2x)dx$

$\frac{y^2}{2} = (x+x^2) + C$

$\underline{y^2 = 2x + 2x^2 + C}$ - общее решение уравнения.

$2^2 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + C$

$4 = 4 + 8 + C$

$C = -8$

$y^2 = 2x(1+x) - 8$ - частное решение уравнения.

Пример 5. Решить задачу Коши:

$$(1+y^2)dx - xydy = 0,\ y(1) = 0.$$

Решение. Уравнение $(1+y^2)dx - xydy = 0$ является уравнением с разделяющимися переменными

Разделим переменные, поделив уравнение на $x(1+y^2) \neq 0$:

$$\frac{dx}{x} = \frac{ydy}{1+y^2}$$

Интегрируя, получим:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{ydy}{1+y^2}$$

$$\ln|x| + c_1 = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+y^2)}{1+y^2}$$

$$\ln|x| + c_1 = \frac{1}{2}\ln\left|1+y^2\right| + c_2.$$

Обозначим $c_1 - c_2 = \ln|c|$:

$$\ln|x| + \ln|c| = \frac{1}{2}\ln\left|1+y^2\right|$$

$$cx = \sqrt{1+y^2} \text{ — общий интеграл уравнения.}$$

Используя начальное условие: $y(1) = 0$, получим частное решение

$$c \cdot 1 = \sqrt{1+0^2} \Rightarrow c = 1.$$

Значит, частное решение данного уравнения при заданном начальном условии имеет вид:

$$x = \sqrt{1+y^2}$$

Ответ: $x = \sqrt{1+y^2}$.

Вернемся к задаче о потере заряда проводником.

Пример 6. Изолированному проводнику сообщим заряд $Q_0 = 1000$*Кл*. Вследствие несовершенства изоляции проводник постепенно теряет свой заряд. Скорость потери заряда в данный момент времени пропорциональна наличному заряду проводника. Какой заряд останется на проводнике по истечении времени t = 10 мин., если за первую минуту потеряно 100 *Кл*?

Решение.

Пусть в момент времени t заряд проводника равен Q . Тогда скорость потери заряда в этот момент времени равна - Q'. По условию задачи $-Q' = kQ$ или $Q' = -kQ$, где k >0 – коэффициент пропорциональности.

Решим последнее уравнение – это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.
Разделив переменные и проинтегрировав, получим:

$$\frac{dQ}{dt} = -kQ;$$

$$\frac{dQ}{Q} = -kdt;$$

$$\int \frac{dQ}{Q} = -k\int dt;$$

$$\ln Q = -kt + \ln C;$$

$$\ln Q - \ln C = -kt;$$

$$\ln \frac{Q}{C} = -kt;$$

Потенцируя, последнее уравнение получим:

$$\frac{Q}{C} = e^{-kt};$$

$$Q = Ce^{-kt};$$

Используя начальное условие $Q = 1000 Кл$ при t = 0, найдём С:

$$1000 = Ce^{0};$$

$$1000 = C \cdot 1;$$

$$C = 1000;$$

Следовательно, $Q = 1000 \cdot e^{-kt}$.

Далее, используя дополнительное условие – при t = 1 мин. $Q = 900 Кл$, имеем
$900 = 1000e^{-k}$, $e^{-k} = 0{,}9$.

Поэтому $Q = 1000 \cdot (0{,}9)^{t}$.

Следовательно, через 10 минут на проводнике останется заряд

$$Q = 1000 \cdot (0{,}9)^{10} = 348{,}7 Кл.$$

3.Выполнить упражнения (в рабочих тетрадях):

1. Найти частное решение дифференциального уравнения $2x^2dy = 5y^3dx$, если y(1) = 1/3.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения $x^2dx + ydy = 0$ если y(0) = 1.

3. Найти частное решение дифференциального уравнения
   $(2x - 1)dy = (y + 1)dx$, если y(5) = 0.