Тема: Элементы комбинаторики.

1. ***Изучить теоретический материал, составить конспект (записать определения, формулы, примеры).***

Человеку часто приходится иметь дело с задачами, в которых нужно подсчитать число всех возможных способов расположения некоторых предметов или осуществления некоторого действия. Целый раздел математики, называемый ***комбинаторикой***, занят поиском ответов на вопросы: сколько всего комбинаций в том или другом случае.

***Комбинаторика* – раздел математики, изучающий вопросы о том, сколько комбинаций определенного типа можно составить из данных предметов (элементов).**

С комбинаторными величинами приходится иметь дело представителям многих специальностей: ученому-химику – при рассмотрении различных возможных типов связи атомов в молекулах, биологу – при изучении различных возможных последовательностей чередования аминокислот в белковых соединениях, конструктору – при проектировании различных машин и механизмов, диспетчеру – при составлении графика движения и т.п.

При оценке средних суммарных результатов в массе мы вынуждены оценивать, сколько различных комбинаций элементов, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов. Становится понятным, что в качестве основного аппарата теории вероятностей выступает комбинаторный анализ – наука о количестве комбинаций элементов, удовлетворяющих определенным условиям.

Большинство комбинаторных задач решается с помощью двух основных правил: правила суммы и правила произведения (основного правила комбинаторики).

Правило суммы. ***Если некоторый объект A можно выбрать m способами, а другой объект B можно выбрать n способами, то выбор «A или B» можно осуществить $m + n$ способами.***

Правило произведения. ***Если объект $x \in X$ может быть выбран m способами и после каждого из таких выборов объект $y \in Y$ может быть выбран n способами, то выбор упорядоченной пары (x, y) может быть осуществлен $m \cdot n$ способами.***

Перейдем к рассмотрению некоторых элементов комбинаторики.

1) Пусть имеется множество, состоящее из **n** элементов. Обозначим его U_n.

Перестановкой из n элементов называется заданный порядок во множестве U_n.

Примеры перестановок:
а) Распределение n различных должностей среди n человек;
б) Расположение n различных предметов в одном ряду.

Сколько различных перестановок можно образовать во множестве U_n? Число перестановок обозначается P_n (читается “Р из n”) и вычисляется по формуле: $\mathbf{P_n = n!}$, где n! = 1*2*3*…*(n-1)*n, то есть произведение n последовательных натуральных чисел от 1 до n, называется n – факториал.

Например, 6! = 1*2*3*4*5*6 = 720.

По определению считается: 1!=1; 0!=1.

Любой факториал можно вычислить с помощью калькулятора.

Пример 1. Сколько существует вариантов замещения 5-ти различных вакантных должностей 5-ю кандидатами?

$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$

Пример 2. Порядок выступления 7 участников конкурса определяется жребием. Сколько различных вариантов жеребьевки при этом возможно?

Решение. Каждый вариант жеребьевки отличается только порядком участников конкурса, т.е. является перестановкой из 7 элементов. Их число равно

$$P_7 = 7! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040.$$

2) Пусть дано множество, состоящее из *n* элементов.

Размещением из *n* элементов по *m* (*0 ≤ m ≤ n*) элементов называется упорядоченное подмножество, содержащее *m* различных элементов данного множества.

Одно размещение из n элементов по m элементов может отличаться от другого как набором элементов, так и порядком их расположения.

Примеры задач, приводящих к необходимости подсчета числа размещений

а) Сколькими способами можно выбрать из 15 человек 5 кандидатов и назначить их на 5 различных должностей?

б) Сколькими способами можно из 20 книг отобрать 12 и расставить их в ряд на полке?

Число всех возможных размещений равно: $\boldsymbol{A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}}$

n – количество элементов, из которого нужно выбрать

m – количество элементов, которое нужно выбрать

Пример 3. В группе из 20 человек нужно выбрать старосту, профорга и физорга. Сколькими способами это можно сделать?

Так как порядок выбора здесь важен (важно, кто какую должность будет занимать), то используем размещения:

$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$; $A_{20}^3 = \frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20!}{17!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\cdots\cdot16\cdot17\cdot18\cdot19\cdot20}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\cdots\cdot16\cdot17} = 18\cdot19\cdot20 = 6840$

Пример 4. Сколько существует различных вариантов выбора 4-х кандидатур из 9-ти специалистов для поездки в 4 различных страны?

$$A_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = 6\cdot7\cdot8\cdot9 = 3024$$

3)Пусть дано множество, состоящее из *n* элементов.

Сочетанием из *n* элементов по *m* (*0 ≤ m ≤ n*) элементов называется любое подмножество, содержащее *m* различных элементов данного множества.

Одно сочетание от другого отличается только составом выбранных элементов (но не порядком их расположения, как у размещений).

Число сочетаний из n элементов по m элементов обозначается $C_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{m}}$ (читается "С из n по m").

Примеры задач, приводящих к подсчету числа сочетаний:

a) Сколько существует вариантов выбора 6-ти человек из 15 кандидатов для назначения на работу в одинаковых должностях?
b) Сколькими способами можно из 20 книг отобрать 12 книг?

Число всех возможных сочетаний равно: $C_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{m}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{m}!\cdot(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m})!}$

n – количество элементов, из которого нужно выбрать

m – количество элементов, которое нужно выбрать

Пример5: Маше нужно выбрать из 8 книг 2 книги. Сколькими способами она может это сделать?

Так как порядок выбора не важен, то применяем формулу числа сочетаний и получаем:

$$C_8^2 = \frac{8!}{2!\,(8-2)!} = \frac{8!}{2! * 6!} = \frac{\cancel{1*2*3*4*5*6}*7*8}{1*2*\cancel{1*2*3*4*5*6}} = \frac{56}{2} = 28$$

Обратите внимание, что не нужно умножать в числителе все натуральные числа от 1 до 8, у вас это отнимет очень много времени. Достаточно подробно расписать числитель и знаменатель, сделать сокращение и все легко считается.
Итак, Маша может выбрать книги 28 способами.

Пример 6. Из группы в 20 человек нужно выделить трех человек для работы на определенном участке. Сколькими способами это можно сделать?
Так как порядок выбора здесь не важен, то используем сочетания:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!};\ C_{20}^3 = \frac{20!}{3!\cdot(20-3)!} = \frac{20!}{3!\cdot 17!}$$
$$= \frac{\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot 16\cdot 17}\cdot 18\cdot 19\cdot 20}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 16\cdot 17}} = \frac{18\cdot 19\cdot 20}{1\cdot 2\cdot 3} = 1140$$

Пример 7. В шахматном турнире участвуют 16 человек. Сколько партий должно быть сыграно в турнире, если между любыми двумя участниками должна быть сыграна одна партия?

Каждая партия играется двумя участниками из 16 и отличается от других только составом пар участников, т.е. представляет собой сочетания из 16 элементов по 2. Их число равно $C_{16}^2 = \frac{16!}{14!2!} = \frac{15\times 16}{1\times 2} = 120.$

Задачи на подсчет числа подмножеств конечного множества называются комбинаторными. Рассмотрим некоторые комбинаторные задачи.

1.Из семи заводов организация должна выбрать три для размещения трех различных заказов. Сколькими способами можно разместить заказы?

Так как из условия ясно, что каждый завод может либо получить один заказ, либо не получить ни одного, и что выбрав три завода, можно по-разному разместить среди них заказы, здесь нужно считать число размещений.

$$A_7^3 = \frac{7!}{4!} = 7\cdot 6\cdot 5 = 210$$

2.Если из текста задачи 1 убрать условие различия трех заказов, сохранив все остальные условия, получим другую задачу. Теперь способ размещения заказов определяется только выбором тройки заводов, так как все эти заводы получат одинаковые заказы, и число вариантов определяется как число сочетаний.

$$C_7^3 = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$$

3.Студенческая группа состоит из 23 человек, среди которых 10 юношей и 13 девушек. Сколькими способами можно выбрать двух человек одного пола?

В данном случае подсчёт C_{23}^2 не годится, поскольку общее количество сочетаний включает в себя и разнополые пары.

Условие «выбрать двух человек одного пола» подразумевает, что необходимо выбрать двух юношей **или** двух девушек, и уже сама словесная формулировка указывает на верный путь решения:

$C_{10}^2 = \frac{10!}{8! \cdot 2!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{8! \cdot 2!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$ способами можно выбрать 2 юношей;

$C_{13}^2 = \frac{13!}{11! \cdot 2!} = \frac{11! \cdot 12 \cdot 13}{11! \cdot 2!} = \frac{12 \cdot 13}{2} = 78$ способами можно выбрать 2 девушек.

Союз **ИЛИ** следует понимать как знак сложения, поэтому двух человек одного пола (без разницы – юношей **или** девушек) можно выбрать: $C_{10}^2 + C_{13}^2 = 45 + 78 = 123$ способами.

4. Рассмотрим ту же студенческую группу. Сколькими способами можно составить пару из юноши и девушки?

$C_{10}^1 = 10$ способами можно выбрать 1 юношу;

$C_{13}^1 = 13$ способами можно выбрать 1 девушку.

Знак «умножить» следует понимать и читать как союз **И**.

Таким образом, одного юношу **и** одну девушку можно выбрать: $C_{10}^1 \cdot C_{13}^1 = 10 \cdot 13 = 130$ способами.

5. У Васи дома живут 4 кота.

а) сколькими способами можно рассадить котов по углам комнаты?
б) сколькими способами можно отпустить гулять котов?
Решаем: во-первых, вновь следует обратить внимание на то, что в задаче речь идёт

о **разных** объектах (даже если коты – однояйцовые близнецы). Это очень важное условие!

а) Данной экзекуции подвергаются **сразу все коты** и важно их расположение, поэтому здесь имеют место перестановки:
$P_4 = 4! = 24$ способами можно рассадить котов по углам комнаты.

При перестановках имеет значение лишь количество различных объектов и их взаимное расположение. В зависимости от настроения Вася может рассаживать животных полукругом на диване, в ряд на подоконнике и т.д. – перестановок во всех случаях будет 24.

б) Сколькими способами можно отпустить гулять котов?

Предполагается, что коты ходят гулять только через дверь, при этом вопрос подразумевает безразличие по поводу количества животных – на прогулку могут выйти 1, 2, 3 или все 4 кота.

Считаем все возможные комбинации:

$C_4^1 = 4$ способами можно отпустить гулять одного кота (любого из четырёх);
$C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$ способами можно отпустить гулять двух котов (варианты перечислите самостоятельно);
$C_4^3 = 4$ способами можно отпустить гулять трёх котов (какой-то один из четырёх сидит дома);
$C_4^4 = 1$ способом можно выпустить всех котов.

Полученные значения следует просуммировать:
$C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 4 + 6 + 4 + 1 = 15$ способами можно отпустить гулять котов.

2. Выполнить практическую работу (по вариантам):

Вариант1

1. В классе 30 учащихся. Сколькими способами можно назначать двух дежурных?
2. В классе 30 учащихся. Сколькими способами можно выбрать из класса команду из 4 учащихся для участия в олимпиаде по истории, литературе, русскому и английскому языкам?
3. Сколькими способами могут девять человек сесть на девять стульев, стоящих в ряд?

Вариант 2

1. В классе 30 учащихся. Сколькими способами можно выбрать 28 человек для осеннего кросса?

2. В группе 25 обучающихся. Сколькими способами из них можно выбрать трех человек для участия в соревнованиях по теннису, в беге на 100 метров и в беге на 3км?

3. Сколькими способами могут семь человек сесть на семь стульев, стоящих в ряд?

Вариант 3

1. В классе 25 учащихся. Сколькими способами можно назначать трех дежурных?

2. В группе 15 обучающихся. Сколькими способами из них можно выбрать двух человек для участия в соревнованиях по теннису, в беге на 100 метров?

3. Сколькими способами могут шесть человек сесть на шесть стульев, стоящих в ряд?

Вариант 4

1. В классе 20 учащихся. Сколькими способами можно назначать двух дежурных?
2. В группе 20 обучающихся. Сколькими способами из них можно выбрать четырех человек для участия в соревнованиях по теннису, плаванию, в беге на 100 метров и в беге на 3км?

4. Сколькими способами могут восемь человек сесть на восемь стульев, стоящих в ряд?

Вариант 5

1. В классе 20 учащихся. Сколькими способами можно выбрать 10 человек для экскурсии?

2. В классе 20 учащихся. Сколькими способами можно выбрать из класса команду из 3 учащихся для участия в олимпиаде по истории, русскому и английскому языкам?

3. Сколькими способами могут пять человек сесть на пять стульев, стоящих в ряд?

Вариант 6

1. В классе 20 учащихся. Сколькими способами можно выбрать 16 человек для осеннего кросса?

2. В классе 15 учащихся. Сколькими способами можно выбрать из класса команду из 2 учащихся для участия в олимпиаде по истории и английскому языку?

3. Сколькими способами могут десять человек сесть на десять стульев, стоящих в ряд?

1 вариант	Баганов К., Бублик В, Киселев А.
2 вариант	Козлов М., Мехоношина В., Молодцова А.
3 вариант	Силантьев К., Фатуллаев Р., Федотов Н.
4 вариант	Филиппова К., Щекоткин Д., Крайнов А.
5 вариант	Ипполитов Е., Князев А., Мухин М., Нестеров А.
6 вариант	Осипов А., Царев Н., Тюленев Д., Штанько А.

Все практические работы выполнить на отдельных листках (оформлять аккуратно, разборчивым почерком) сфотографировать и отправить на электронную почту: **olga.georg.gor@yandex.ru**