Тема: **Уравнения прямой на плоскости. Кривые второго порядка.**

1. **Прослушайте звуковой файл https://yadi.sk/d/Ia_pdU6AEbZtdA .**
2. **Составить краткий конспект (записать определения, примеры).**

I. Уравнения прямой на плоскости.

1) **Общее уравнение прямой имеет вид:** $\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$**,** где А, В, С- любые действительные числа.

2) **Уравнение прямой с угловым коэффициентом**

Всем известный «школьный» вид уравнения прямой $y = kx + b$ называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом** k. Например, если прямая задана уравнением $y = 2x - 2$, то её угловой коэффициент: $k = 2$.

Как составить уравнение прямой с угловым коэффициентом?

Если известна точка $M(x_0; y_0)$, принадлежащая некоторой прямой, и угловой коэффициент k этой прямой, то уравнение данной прямой выражается формулой:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

Пример 1. Составить уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = \frac{3}{2}$, если известно, что точка $A(3; -2)$ принадлежит данной прямой.

Решение: Уравнение прямой составим по формуле $y - y_0 = k(x - x_0)$. В данном случае:

$$y - (-2) = \frac{3}{2} \cdot (x - 3)$$

$$y + 2 = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$$

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{13}{2}$$

Ответ: $y = \frac{3}{2}x - \frac{13}{2}$

3) **Уравнение прямой с направляющим вектором**
(Направляющий вектор прямой - это любой ненулевой вектор, лежащий на данной прямой или на параллельной ей прямой.)

Если известна некоторая точка $M(x_0; y_0)$, принадлежащая прямой, и направляющий вектор $\bar{p}(p_1; p_2)$ этой прямой, то уравнение данной прямой можно составить по формуле:

$$\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2}$$

Иногда его называют ***каноническим уравнением прямой***.

__Пример 2.__ Привести уравнение прямой к каноническому виду x + 3y – 1 = 0

Оставляем слева только слагаемое *x*: $x=-3y+1$. Выносим -*3* за скобки в правой части равенства:

$x=-3(y-\frac{1}{3})$. Записываем полученное равенство в виде пропорции,

$\frac{x}{-3}=\frac{y-\frac{1}{3}}{1}$, которая дает нам искомое каноническое уравнение прямой на плоскости.

__Пример 3__

Составить уравнение прямой по точке $M(1;2)$ и направляющему вектору $\bar{p}(2;1)$

Решение: Уравнение прямой составим по формуле $\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2}$. В данном случае:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}$$

С помощью свойств пропорции избавляемся от дробей:

$$1\cdot(x-1)=2\cdot(y-2)$$

И приводим уравнение к общему виду:

$$x-1=2y-4$$

$$x-2y+3=0$$

Ответ: $x-2y+3=0$

Как найти направляющий вектор по общему уравнению прямой?

Если прямая задана общим уравнением $Ax+By+C=0$ в прямоугольной системе координат, то вектор $\bar{p}(-B;A)$ является направляющим вектором данной прямой.

Примеры нахождения направляющих векторов прямых:

1) $5x+7y-1=0 \Rightarrow \quad \bar{p}(-7;5)$

2) $2y+3=0 \quad (0\cdot x+2y+3=0)\Rightarrow \quad \bar{p}(-2;0)$

3) $5x-2=0 \quad (5x+0\cdot y-2=0)\Rightarrow \quad \bar{p}(0;5)$

В том случае, если одна из координат направляющего вектора нулевая, поступают очень просто:

__Пример 4__

Составить уравнение прямой по точке $A(-4;2)$ и направляющему вектору $\bar{p}(4;0)$.

Решение: Формула $\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2}$ не годится, так как знаменатель правой части равен нулю. Выход есть! Используя свойства пропорции, перепишем формулу в виде $p_2\cdot(x-x_0)=p_1\cdot(y-y_0)$,

$$0\cdot(x-(-4))=4\cdot(y-2)$$
$$0=4\cdot(y-2)$$
$$4\cdot(y-2)=0$$
$$y-2=0$$

Ответ: $y-2=0$

4) Уравнение прямой, проходящей через две точки.
Как составить уравнение прямой по двум точкам?

Если известны две точки $M_1(x_1;y_1), M_2(x_2;y_2)$, то уравнение прямой, проходящей через данные точки, можно составить по формуле:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

Примечание*: точки можно «поменять ролями» и использовать формулу* $\frac{x-x_2}{x_1-x_2}=\frac{y-y_2}{y_1-y_2}$. *Такое решение будет равноценным.*

__Пример 5__

а)Составить уравнение прямой по двум точкам $A\left(\frac{3}{2};\frac{7}{3}\right), B(-1;7)$.

Решение: Используем формулу:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$$\frac{x-\frac{3}{2}}{-1-\frac{3}{2}}=\frac{y-\frac{7}{3}}{7-\frac{7}{3}}$$

$$\frac{x-\frac{3}{2}}{-\frac{5}{2}}=\frac{y-\frac{7}{3}}{\frac{14}{3}}$$

$$\frac{14}{3}\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)=-\frac{5}{2}\cdot\left(y-\frac{7}{3}\right)$$

Именно сейчас удобно избавиться от дробных чисел. В данном случае нужно умножить обе части на 6:

$$6\cdot\frac{14}{3}\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)=-\frac{5}{2}\cdot 6\cdot\left(y-\frac{7}{3}\right)$$

$$28\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)=-15\cdot\left(y-\frac{7}{3}\right)$$

$$28x - 42 = -15y + 35$$

Раскрываем скобки $28x - 42 + 15y - 35 = 0$

Ответ: $AB: 28x + 15y - 77 = 0$

б) Составить уравнение прямой по двум точкам**:** (-1, 2) и (2, 1).

Решение.

По уравнению

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

полагая в нем $x_1 = -1$, $y_1 = 2$, $x_2 = 2$, $y_2 = 1$ (без разницы, какую точку считать первой, какую - второй), получим

$$\frac{y - 2}{1 - 2} = \frac{x + 1}{2 + 1},$$ или $$\frac{y - 2}{-1} = \frac{x + 1}{3};$$

после упрощений получаем окончательно искомое уравнение в виде

$x + 3y - 5 = 0$.

5) Уравнение прямой по вектору нормали.

(Вектор, перпендикулярный прямой, называется вектором нормали этой прямой или ее нормальным вектором.)

Если прямая задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$ в прямоугольной системе координат, то вектор $\overline{n}(A; B)$ является вектором нормали данной прямой.

Как составить уравнение прямой по точке и вектору нормали?

Если известна некоторая точка $M(x_0; y_0)$, принадлежащая прямой, и вектор нормали $\overline{n}(n_1; n_2)$ этой прямой, то уравнение данной прямой выражается формулой:

$$n_1 \cdot (x - x_0) + n_2 \cdot (y - y_0) = 0$$

Пример 6

Составить уравнение прямой по точке $M(-1; -3)$ и вектору нормали $\overline{n}(3; -1)$. Найти направляющий вектор прямой.

Решение: Используем формулу:

$$n_1 \cdot (x - x_0) + n_2 \cdot (y - y_0) = 0$$

$$3 \cdot (x - (-1)) - 1 \cdot (y - (-3)) = 0$$

$$3 \cdot (x + 1) - (y + 3) = 0$$

$$3x + 3 - y - 3 = 0$$

$$3x - y = 0$$

6) **Уравнение прямой в отрезках.**

Уравнение прямой в отрезках имеет вид $\frac{x}{M}+\frac{y}{N}=1$, где M, N – ненулевые константы.

Некоторые типы уравнений нельзя представить в таком виде, например, прямую пропорциональность $Ax+By=0$ (так как свободный член C равен нулю и единицу в правой части никак не получить).

Задача состоит в том, чтобы общее уравнение прямой $Ax+By+C=0$ представить в виде уравнения прямой в отрезках $\frac{x}{M}+\frac{y}{N}=1$. Чем оно удобно? Уравнение прямой в отрезках позволяет быстро найти точки пересечения прямой с координатными осями, что бывает очень важным в некоторых задачах высшей математики.

Найдём точку пересечения прямой с осью OX. Обнуляем «игрек», и уравнение принимает вид $\frac{x}{M}=1$. Нужная точка получается автоматически: $M_1(M;\,0)$.

Аналогично с осью $OY: x=0 \Rightarrow \frac{y}{N}=1 \Rightarrow M_2(0;\,N)$ – точка, в которой прямая пересекает ось ординат.

<u>Пример 7</u>

Дана прямая $5x-7y+11=0$. Составить уравнение прямой в отрезках и определить точки пересечения графика с координатными осями.

Решение: Приведём уравнение к виду $\frac{x}{M}+\frac{y}{N}=1$. Сначала перенесём свободный член в правую часть:

$$5x-7y=-11$$

Чтобы получить справа единицу, разделим каждый член уравнения на –11:

$$\frac{5x}{-11}+\frac{7y}{11}=1$$

Делаем дроби трёхэтажными:

$$\frac{x}{\left(\frac{-11}{5}\right)}+\frac{y}{\frac{11}{7}}=1$$

Точки пересечения прямой с координатными осями всплыли на поверхность:

$$M_1(M;0)=M_1\left(\frac{-11}{5};\,0\right)$$

$$M_2(0;N)=M_2\left(0;\,\frac{11}{7}\right)$$

Ответ: $\frac{x}{\left(\frac{-11}{5}\right)} + \frac{y}{\frac{11}{7}} = 1 \qquad M_1\left(\frac{-11}{5};0\right), M_2\left(0;\frac{11}{7}\right)$

7) Угол между прямыми

Если уравнения прямой заданы в общем виде

$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$

$A_2x + B_2y + C_2 = 0,$

угол между ними определяется по формуле

$$tg\theta = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}.$$

Условия параллельности двух прямых:

а) Если прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом, то необходимое и достаточное условие их параллельности состоит в равенстве их угловых коэффициентов:

$k_1 = k_2.$

б) Для случая, когда прямые заданы уравнениями в общем виде, необходимое и достаточное условие их параллельности состоит в том, что коэффициенты при соответствующих текущих координатах в их уравнениях пропорциональны, т. е.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Условия перпендикулярности двух прямых:

а) В случае, когда прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом, необходимое и достаточное условие их перпендикулярности заключается в том, что их угловые коэффициенты обратны по величине и противоположны по знаку, т. е.

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}$$

Это условие может быть записано также в виде

$k_1k_2 = -1.$

б) Если уравнения прямых заданы в общем виде, то условие их перпендикулярности (необходимое и достаточное) заключается в выполнении равенства

$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$

Пример 8. Найти угол между двумя прямыми $y = 2x + 4$ и $y = 3x - 1$.

Решение.

Поставим перед собой задачу найти острый угол между данными прямыми. Воспользуемся формулой

$$tg\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2},$$

Так как прямые заданы формулами с угловым коэффициентом, причем поскольку нас интересует острый угол, правую часть формулы возьмем по абсолютной величине:

$$tg\theta = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

У нас

$k_1 = 2$, $k_2 = 3$;

$$tg\theta = \frac{3-2}{1+3\cdot 2}; \quad tg\theta = \frac{1}{7}.$$

<u>Пример 9.</u> Найти угол между двумя прямыми $3x + 4y - 7 = 0$ и $4x - 3y + 8 = 0$.

<u>Решение.</u>

Воспользуемся формулой

$$tg\theta = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2},$$

так как уравнения прямых заданы в общем виде.

У нас $A_1 = 3$; $B_1 = 4$; $A_2 = 4$; $B_2 = -3$;

$$tg\theta = \frac{-9-16}{12-12}, \quad tg\theta = \frac{-25}{0};$$

и так как деление на нуль невозможно, то $tg\theta$ не существует. Угол $\theta = 90^\circ$, т. е. прямые перпендикулярны. Их перпендикулярность можно было усмотреть и сразу, составив выражение $A_1A_2 + B_1B_2$ и убедившись, что оно равно нулю (выполняется условие перпендикулярности двух прямых).

II. Кривые второго порядка.

(В этой теме записать только определения, которые выделены жирным шрифтом, выполнить чертежи и записать примеры 10 и 11).

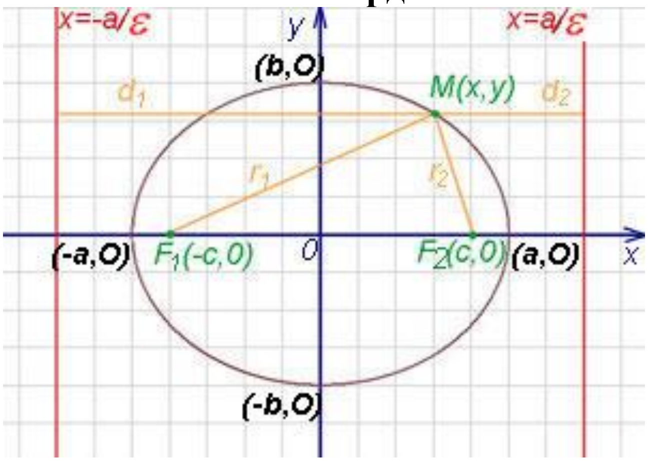
Определение эллипса. **Эллипсом называется множество всех точек плоскости, таких, для которых сумма расстояний до точек, называемых фокусами, есть величина постоянная и бОльшая, чем расстояние между фокусами.**

Фокусы обозначены как F_1 и F_2 на рисунке ниже.

Каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где *a* и *b* (*a* > *b*) - длины полуосей, т. е. половины длин отрезков, отсекаемых эллипсом на осях координат.



Прямая, проходящая через фокусы эллипса, является его осью симметрии. Другой осью симметрии эллипса является прямая, проходящая через середину отрезка F_1F_2 перпендикулярно этому отрезку. Точка *O* пересечения этих прямых служит центром симметрии эллипса или просто центром эллипса.

Ось абсцисс эллипс пересекает в точках (*a*, *O*) и (- *a*, *O*), а ось ординат - в точках (*b*, *O*) и (- *b*, *O*). Эти четыре точки называются вершинами эллипса. Отрезок между вершинами эллипса на оси абсцисс называется его большой осью, а на оси ординат - малой осью. Их отрезки от вершины до центра эллипса называются полуосями.

Если *a* = *b*, то уравнение эллипса принимает вид $x^2+y^2=a^2$. Это уравнение окружности радиуса *a*, а окружность - частный случай эллипса. Эллипс можно получить из окружности радиуса *a*, если сжать её в *a*/*b* раз вдоль оси *Oy*.

Пример 10.

Проверить, является ли линия, заданная общим уравнением $9x^2+25y^2-225=0$, эллипсом.

Решение. Производим преобразования общего уравнения. Применяем перенос свободного члена в правую часть, почленное деление уравнения на одно и то же число и сокращение дробей:

$$9x^2+25y^2-225=0$$

$$9x^2+25y^2=225$$

$$\frac{9x^2}{225}+\frac{25y^2}{225}=1$$

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Ответ. Полученное в результате преобразований уравнение является каноническим уравнением эллипса. Следовательно, данная линия - эллипс.

Пример. Составить каноническое уравнение эллипса, если его полуоси соответственно равны 5 и 4.

Решение. Смотрим на формулу канонического уравнения эллипса и подставляем: бОльшая полуось - это $a = 5$, меньшая полуось - это $b = 4$. Получаем каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

Точки $F_1(-c,\ 0)$ и $F_2(c,\ 0)$, обозначенные зелёным на большей оси, где $c=\sqrt{a^2-b^2}$, называются фокусами**.**

Число $\varepsilon=\dfrac{c}{a}<1$ называется эксцентриситетом эллипса.

Отношение b/a характеризует "сплюснутость" эллипса. Чем меньше это отношение, тем сильнее эллипс вытянут вдоль большой оси. Однако степень вытянутости эллипса чаще принято выражать через эксцентриситет, формула которого приведена выше. Для разных эллипсов эксцентриситет меняется в пределах от 0 до 1, оставаясь всегда меньше единицы.

Определение гиперболы. **Гиперболой называется множество всех точек плоскости, таких, для которых модуль разности расстояний от двух точек, называемых фокусами, есть величина постоянная и меньшая, чем расстояние между фокусами.**

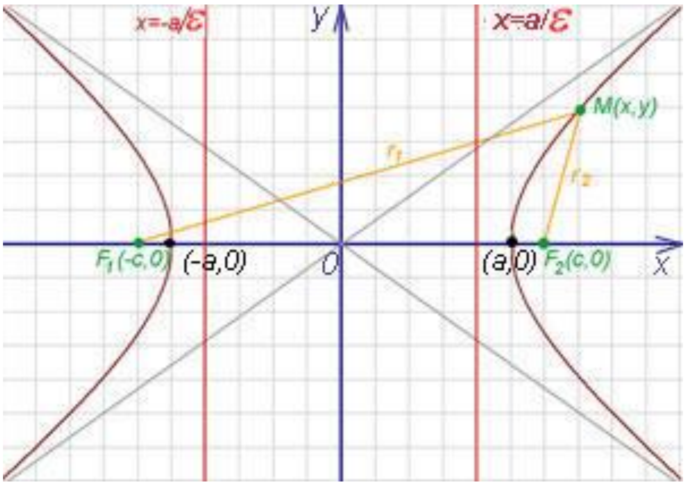
Каноническое уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

, где *a* и *b* - длины полуосей, действительной и мнимой.

На чертеже ниже фокусы обозначены как F_1 и F_2.

На чертеже ветви гиперболы - бордового цвета.



При $a = b$ гипербола называется равносторонней.

Пример. Составить каноническое уравнение гиперболы, если его действительная полуось $a = 5$ и мнимая $b = 3$.

Решение. Подставляем значения полуосей в формулу канонического уравнения гиперболы и получаем:

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Точки пересечения гиперболы с её действительной осью (т. е. с осью Ox) называются вершинами. Это точки (a, 0) (- a, 0), они обозначены и надписаны на рисунке чёрным.

Точки $F_1(-c,\ 0)$ и $F_2(c,\ 0)$, где

$$c = \sqrt{a^2 + b^2},$$

называются фокусами гиперболы (на чертеже обозначены зелёным, слева и справа от ветвей гиперболы).

Число $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ называется эксцентриситетом гиперболы.

Гипербола состоит из двух ветвей, лежащих в разных полуплоскостях относительно оси ординат.

Пример. Составить каноническое уравнение гиперболы, если расстояние между фокусами равно 10 и действительная ось равна 8.

Решение.

Если действительная полуось равна 8, то её половина, т. е. полуось $a = 4$, Если расстояние между фокусами равно 10, то число c из координат фокусов равно 5.

То есть, для того, чтобы составить уравнение гиперболы, потребуется вычислить квадрат мнимой полуоси b.

Подставляем и вычисляем:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$5 = \sqrt{16 + b^2}$$
$$25 = 16 + b^2$$
$$b^2 = 25 - 16 = 9$$

Получаем требуемое в условии задачи каноническое уравнение гиперболы:

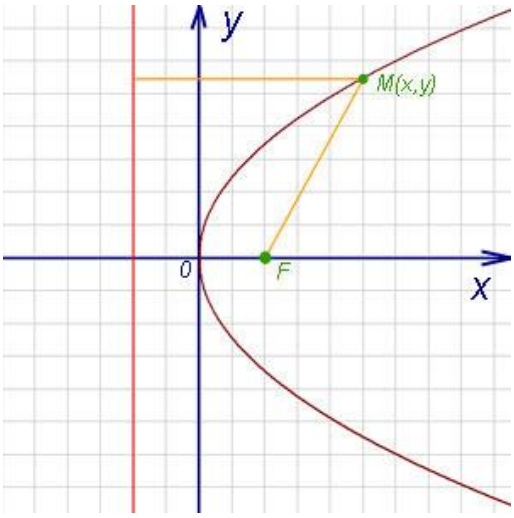
$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Определение параболы. **Параболой называется множество всех точек плоскости, таких, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от точки, называемой фокусом, и от прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус.**

Каноническое уравнение параболы имеет вид:

$$y^2 = 2px,$$

где число p, называемое параметром параболы, есть расстояние от фокуса до директрисы.



На чертеже линия параболы - бордового цвета, директриса - ярко-красного цвета, расстояния от точки до фокуса и директрисы - оранжевого.

В математическом анализе принята другая запись уравнения параболы:
$y = ax^2$,
то есть ось параболы выбрана за ось координат. Можно заметить, что ax^2 - это квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$, в котором $b = 0$ и $c = 0$. График любого квадратного трёхчлена, то есть левой части квадратного уравнения, будет параболой.

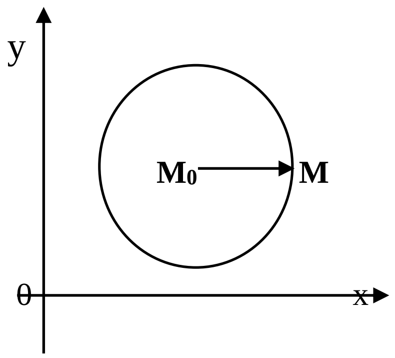
Фокус параболы имеет координаты $\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$

Директриса параболы определяется уравнением $x = -\frac{p}{2}$.

Расстояние r от любой точки $M(x,\ y)$ параболы до фокуса определяется формулой $r = \frac{p}{2} + x$.
Для каждой из точек параболы расстояние до фокуса равно расстоянию до директрисы.

Пример. Определить координаты фокуса параболы $y^2 = 4x$
Решение. Число p расстояние от фокуса параболы до её директрисы. Начало координат в данном случае - в роли любой точки, расстояния от которой от фокуса до директрисы равны. Находим p:
$4 = 2p$
$p = 2$
Находим координаты фокуса параболы:
$F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$

Определение окружности. Окружность – это множество точек M плоскости, равноотстоящих от данной точки M_0, называемой центром.



R = $|M_0 M|$ - радиус окружности.
Пусть $M_0(x_0, y_0)$, $M\ (x, y)$.

Тогда $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ **- уравнение окружности в прямоугольных декартовых координатах.**

Если $M_0=0(0,0)$**, то получаем *каноническое уравнение окружности*** $x^2+y^2=R^2$ **.**

<u>Пример 11.</u> Определить координаты центра и радиус окружности

$x^2+y^2+10x-4y-35=0$.

Решение. Выделим полные квадраты относительно переменных x и y:

$$\left(x^2+10x\right)+\left(y^2-4y\right)=35 \Rightarrow (x+5)^2+(y-2)^2=35+29 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+5)^2+(y-2)^2=64.$$

Следовательно, $M_0(-5,2)$, $R=8$.

3. Ответить на контрольные вопросы (устно):

1) Вспомните названия основных кривых второго порядка.
2) Назовите основные элементы эллипса, гиперболы, параболы, окружности.
3) Найдите в Internet и прочитайте о кривых третьего и четвертого порядка (полукубическая парабола, декартов лист, циклоида, улитка Паскаля, кардиоида, спираль Архимеда).

4. Выполнить практическую работу:

Вариант 1

1. Составить уравнение прямой *AB*, если *A(-3; -3), B(-4; 5)*. (см. пример 5)

2. Привести уравнение прямой к каноническому виду *l: 2x + 3y – 18 = 0* (см. пример 2)

3.Доказать, что прямые перпендикулярны: у = 2х + 3; у = - 0,5х – 9 (см. условие перпендикулярности двух прямых, уравнения которых заданы в общем виде).

4. Проверить, является ли линия, заданная общим уравнением $4x^2 + 9y^2 = 36$, эллипсом (см. пример 10).

Вариант 2

1. Составить уравнение прямой *AB*, если *A(4; -2), B(-4; 2)* (см. пример 5)

2. Привести уравнение прямой к каноническому виду l*: 3x + 7y – 42 = 0* (см. пример2)

3. Доказать, что прямые перпендикулярны: y = - 4x – 1; y = 0,25x + 4 (см. условие перпендикулярности двух прямых, уравнения которых заданы в общем виде).

4. Проверить, является ли линия, заданная общим уравнением $16x^2 + 4y^2 = 64$, эллипсом. (см. пример 10).

Вариант 3

1. Составить уравнение прямой *AB*, если *A(0; -3), B(-4; 1)* (см. пример 5)

2.Привести уравнение прямой к каноническому виду l*: 5x – y + 20 = 0* (см. пример2)

3. Доказать, что прямые перпендикулярны: y = - 2x -7; y = 0,5x + 4 (см. условие перпендикулярности двух прямых, уравнения которых заданы в общем виде).

4. Проверить, является ли линия, заданная общим уравнением $25x^2 + 9y^2 = 225$, эллипсом. (см. пример 10).

Вариант 4

1. Составить уравнение прямой *AB*, если *A(3; 2), B(1; -1)* (см. пример 5)

2.Привести уравнение прямой к каноническому виду l*: -4x + 3y – 24 = 0* (см. пример2)

3. Доказать, что прямые перпендикулярны: 2x – 3y + 5 = 0; 3x +2y – 8 = 0 (см. условие перпендикулярности двух прямых, уравнения которых заданы в общем виде).

4. Определить координаты центра и радиус окружности $x^2 + y^2 + 6x – 8y – 24 = 0$ (см. пример 11).

Вариант 5

1. Составить уравнение прямой *AB*, если *A(-2; -1), B(-1; 4)* (см. пример 5)

2.Привести уравнение прямой к каноническому виду l*:* $7x - 2y + 28 = 0$ (см. пример2)

3. Доказать, что прямые перпендикулярны: $5x + 4y - 3 = 0$; $4x - 5y + 8 = 0$ (см. условие перпендикулярности двух прямых, уравнения которых заданы в общем виде).

4. Определить координаты центра и радиус окружности $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 31 = 0$ (см. пример 11).

Задание 4 во всех вариантах выполняем на оценку «5».

1 вариант	Баганов К., Бублик В., Ипполитов Е., Киселев А.
2 вариант	Козлов М., Мехоношина В., Филиппова К., Молодцова А.
3 вариант	Силантьев К., Фатуллаев Р., Федотов Н., Крайнов А.
4 вариант	Щекоткин Д., Князев А., Мухин М., Нестеров А.
5 вариант	Осипов А., Царев Н., Тюленев Д., Штанько А.

Все практические работы выполнить на отдельных листках (оформлять аккуратно, разборчивым почерком) сфотографировать и отправить на электронную почту: **olga.georg.gor@yandex.ru**