Тема: **Числовые ряды. Признаки сходимости числовых рядов.**

1. ***Изучить теоретический материал. составить краткий конспект (записать определения, примеры).***

1. Числовые ряды. Основные понятия

На этом уроке, а точнее, на серии уроков, мы научимся управляться с рядами. Тема не очень сложная, но для ее освоения потребуются знание понятия предела и умение находить простейшие пределы (Необходимо повторить материал уроков от 3.02., 5.02., 8.02.2021)

1.1. Определение числового ряда

Определение 1. ***Числовым рядом*** называется выражение вида
$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots,$ (1)
где a_1, a_2, …, a_n, … - числа, принадлежащие некоторой определенной числовой системе.

Для сокращенного обозначения рядов используется знак суммирования, а именно:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Здесь:

$\sum$ – математический значок суммы;

a_n – **общий член ряда** (запомните этот простой термин);

n – переменная-«счётчик». Запись $\sum_{n=1}^{\infty}$ обозначает, что проводится суммирование от 1 до «плюс бесконечности», то есть, сначала у нас $n=1$, затем $n=2$, потом $n=3$, и так далее – до бесконечности. Вместо переменной n иногда используется переменная k или m. Суммирование не обязательно начинается с единицы, в ряде случаев оно может начинаться с нуля $\sum_{n=0}^{\infty}$, с двойки $\sum_{n=2}^{\infty}$ либо с любого *натурального числа*.

В соответствии с переменной-«счётчиком» любой ряд можно расписать развёрнуто:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots$$

– и так далее, до бесконечности.

Определение 2. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются ***членами ряда***, **a_n** называется ***общим членом ряда***. (2)

Если все они неотрицательны *(больше либо равны нулю)*, то такой ряд называют **положительным числовым рядом**.

Рассмотрим некоторые примеры рядов.

Пример 1. Ряд $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ (3)

называется рядом геометрической прогрессии.

Если, например, ***a***=1, ***q*** = 1/2, то получим ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Пример 2. Ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, (4)

составленный из чисел, обратных натуральным числам, называется гармоническим рядом.

Пример 3. $$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Пример 4. $$\ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ldots + \ln\frac{n+1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n+1}{n}.$$

Пример 5.

Записать первые три члена ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)$$

Сначала $n = 1$, тогда: $2 \cdot 1 + 1 = 3$

Затем $n = 2$, тогда: $2 \cdot 2 + 1 = 5$

Потом $n = 3$, тогда: $2 \cdot 3 + 1 = 7$

Процесс можно продолжить до бесконечности, но по условию требовалось написать первые три члена ряда, поэтому записываем ответ: $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1) = 3 + 5 + 7 + \ldots$

Обратите внимание на принципиальное отличие от **числовой последовательности**, в которой члены не суммируются, а рассматриваются как таковые.

Пример 6

Записать первые три члена ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\ldots$$

Примечание: *обратите внимание, что переменная-«счётчик» в данном примере «заряжается» со значения* $n=2$

1.2. Сходящиеся и расходящиеся ряды

Одной из ключевых задач темы является **исследование ряда на сходимость**. При этом возможны два случая:

1) **Ряд** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **расходится**.
Это значит, что бесконечная сумма равна бесконечности: $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\ldots=\infty$ либо суммы вообще *не существует*, как, например, у ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n=-1+1-1+1-1+\ldots$$
Хороший образец расходящегося числового ряда встретился в начале урока (пример 5): $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)=3+5+7+\ldots$. Здесь совершенно очевидно, что каждый следующий член ряда больше, чем предыдущий, поэтому $3+5+7+\ldots=\infty$ и, значит, ряд расходится. Ещё более тривиальный пример: $\sum_{n=1}^{\infty}1^n=1+1+1+\ldots$.

2) **Ряд** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **сходится**. Это значит, что бесконечная сумма равна некоторому *конечному числу* S: $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\ldots=S$.

Определение Ряд (1) называется ***сходящимся***, если последовательность его частичных сумм сходится, т. е. существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$.

Число S называется ***суммой ряда***. Если $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$ не существует, то ряд называется ***расходящимся*** и ему не приписывается никакое числовое значение.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 0^n = 0+0+0+\ldots = 0$ сходится и его сумма равна нулю.

В качестве более содержательного примера можно привести *бесконечно убывающую* геометрическую прогрессию, известную нам ещё со школы: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots$. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии рассчитывается по формуле: $S=\frac{A}{1-q}$, где A – первый член прогрессии, а q – её основание, которое, как правило, записывают в виде *правильной* дроби. В данном случае: $A=1$, $q=\frac{1}{4}$. Таким образом: $S=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$ Получено конечное число, значит, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ сходится, что и требовалось доказать.

Однако в подавляющем большинстве случаев **найти сумму ряда** не так-то просто, и поэтому на практике для исследования сходимости ряда используют специальные признаки, которые доказаны теоретически.

Существует несколько признаков сходимости ряда: *необходимый признак сходимости ряда, признаки сравнения, признак Даламбера, признаки Коши*, *признак Лейбница* и некоторые другие признаки. **Когда какой признак применять?** Это зависит от общего члена ряда a_n.

1.3. Необходимое условие сходимости ряда

__Теорема__ **Если ряд (2) сходится, то его общий член a_n стремится к нулю.**

Обратное в общем случае неверно, т.е., если $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд может как сходиться, так и расходиться. И поэтому этот признак используют для обоснования __расходимости__ ряда:

Следствие. **Если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ или этот предел не существует, то ряд расходится.**

В частности, возможна ситуация, когда предела не существует вообще, как, например, не существует предела $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$.

Пример 1. Ряд $\left(1+\frac{1}{1}\right)^1+\left(1+\frac{1}{2}\right)^2+\left(1+\frac{1}{3}\right)^3+\ldots+\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+\ldots$ расходится, т. к.

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\neq 0$.

Пример 2. Докажем, что ряд из примера (5) $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)$ расходится.

Общий член ряда: $a_n=2n+1$

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(2n+1)=\infty\neq 0$

Вывод: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)$ **расходится**, так как не выполнен необходимый признак сходимости ряда.

Пример 3. Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{7n+3}$

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{7n+3}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$

Делим числитель и знаменатель на n

$(*)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\frac{7n+3}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{7+\frac{3}{n}^{\to 0}}=\frac{1}{7}\neq 0$

Исследуемый ряд **расходится**, так как не выполнен необходимый признак сходимости ряда.

Необходимый признак часто применяется в реальных практических заданиях.

Итак, когда нам дан ЛЮБОЙ числовой ряд, **в первую очередь** проверяем (мысленно или на черновике): а стремится ли его общий член к нулю? Если не стремится, то даём ответ о том, что ряд расходится.

Какие типы очевидно расходящихся рядов мы рассмотрели? Сразу понятно, что расходятся ряды вроде $\sum_{n=1}^{\infty}n$ или $\sum_{n=1}^{\infty}3^n$. Также расходятся ряды, *когда в числителе и знаменателе находятся многочлены, и старшая степень числителя больше либо равна старшей степени знаменателя*. Во всех этих случаях при решении и оформлении примеров мы используем необходимый признак сходимости ряда.

Почему признак называется **необходимым**? Для того, чтобы ряд сходился, **необходимо**, чтобы его общий член стремился к нулю. И всё бы было отлично, но этого ещё **не достаточно**. Иными словами, **если общий член ряда**

стремится к нулю, ТО ЭТО ЕЩЕ НЕ ЗНАЧИТ, что ряд сходится – он может, как сходиться, так и расходиться!

Например, ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Данный ряд называется **гармоническим рядом**.

Легко заметить, что $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, **НО!** В теории математического анализа доказано, что **гармонический ряд расходится**.

Также следует запомнить понятие обобщенного гармонического ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$

Данный ряд **расходится** при $\alpha \le 1$. Например, расходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Данный ряд **сходится** при $\alpha > 1$. Например, сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

1.4. Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами

Признак сравнения

Пусть даны два ряда с неотрицательными членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \qquad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \qquad (2)$$

Если $b_n \le a_n$ для любого n, то из сходимости ряда (1) следует сходимость ряда (2) и сумма ряда (2) не превосходит сумму ряда (1), из расходимости ряда (2) следует расходимость ряда (1).

Иными словами: **Из сходимости ряда с бОльшими членами следует сходимость ряда с меньшими членами**.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$.

Сравниваем данный ряд с гармоническим $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который, как известно, расходится: $\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\frac{1}{n}$, следовательно, данный ряд также расходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}=1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 2^n}+\ldots\ .$$
Сравниваем этот ряд с рядом геометрической прогрессии $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$, который сходится, т.к. знаменатель геометрической прогрессии q=1/2<1: $\frac{1}{n\cdot 2^n}\leq\frac{1}{2^n}$ следовательно, данный ряд также сходится.

Пример 3. Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n+2}$

Во-первых, проверяем (мысленно либо на черновике) выполнение **необходимого признака сходимости**:

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+n+2}=0$, необходимый признак сходимости выполнен.

Заглядываем в группу обобщенного гармонического ряда и, ориентируясь на старшую степень, находим похожий ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ Из теории известно, что он сходится (α=2>1).

Для всех натуральных номеров $n=1,2,3,\ldots$ справедливо очевидное неравенство:
$n^2+n+2>n^2$

а бОльшим знаменателям соответствуют мЕньшие дроби:
$\frac{1}{n^2+n+2}\leq\frac{1}{n^2}$, значит, по признаку сравнения исследуемый ряд **сходится** вместе с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

<u>Признак Даламбера</u>

Пусть дан ряд (1) с положительными членами. Допустим, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ существует и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=p$. Тогда: а) если p<1, то ряд (1) сходится; б) если p>1, то ряд (1) расходится.

Когда нужно применять признак сходимости Даламбера?

Основные предпосылки для применения признака Даламбера следующие:

1) В общий член ряда входит какое-нибудь число в степени, например, 2^n, 3^n, 5^n и так далее.

2) В общий член ряда входит факториал.

Повторим:

$$
\begin{aligned}
&0!=1\\
&1!=1\\
&2!=1\cdot 2\\
&3!=1\cdot 2\cdot 3\\
&4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\\
&\ldots\\
&n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\\
&(n+1)!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Факториал может располагаться вверху или внизу дроби.

3) Если в общем члене ряда есть «цепочка множителей», например, $1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$.

Вместе со степенями или (и) факториалами в начинке ряда часто встречаются многочлены, это не меняет дела – нужно использовать признак Даламбера.

Кроме того, в общем члене ряда может встретиться одновременно и степень, и факториал; может встретиться два факториала, две степени, важно чтобы там находилось **хоть что-то** из рассмотренных пунктов – и это как раз предпосылка для использования признака Даламбера.

<u>Пример 1</u>

Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n-1}{4^n}$

Мы видим, что в общем члене ряда у нас есть 4^n, а это верная предпосылка того, что нужно использовать признак Даламбера. Сначала полное решение и образец оформления, комментарии ниже.

Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\overset{(1)}{=}\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^2+(n+1)-1}{4^{n+1}}}{\dfrac{n^2+n-1}{4^n}}\overset{(2)}{=}\lim_{n\to+\infty}\frac{4^n\cdot((n+1)^2+(n+1)-1)}{4^{n+1}\cdot(n^2+n-1)}\overset{(3)}{=}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{4^n\cdot\left(n^2+2n+1+n+1-1\right)}{4\cdot4^n\cdot\left(n^2+n-1\right)}\overset{(4)}{=}\frac{1}{4}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+3n+1}{n^2+n-1}\right)=\frac{\infty}{\infty}\overset{(5)}{=}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\dfrac{n^2+3n+1}{n^2}}{\dfrac{n^2+n-1}{n^2}}\right)\overset{(6)}{=}\frac{1}{4}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+\overset{\to0}{\dfrac{3}{n}}+\overset{\to0}{\dfrac{1}{n^2}}}{1+\overset{\to0}{\dfrac{1}{n}}-\overset{\to0}{\dfrac{1}{n^2}}}\right)\overset{(7)}{=}\frac{1}{4}\cdot1=\frac{1}{4}<1$$

Таким образом, исследуемый ряд **сходится.**

А теперь подробное описание решения:

(1) Составляем отношение следующего члена ряда к предыдущему: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. Из условия мы видим, что общий член ряда $a_n=\dfrac{n^2+n-1}{4^n}$. Для того, чтобы получить следующий член ряда нужно **ВМЕСТО** n **подставить** $n+1$**:** $a_{n+1}=\dfrac{(n+1)^2+(n+1)-1}{4^{n+1}}$.

(2) Избавляемся от **четырехэтажности дроби**. При определенном опыте решения этот шаг можно пропускать.

(3) В числителе раскрываем скобки. В знаменателе выносим четверку из степени.

(4) Сокращаем на 4^n. Константу $\dfrac{1}{4}$ выносим за знак предела. В числителе в скобках приводим подобные слагаемые.

(5) Неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$ устраняется стандартным способом – **делением числителя и знаменателя** на «эн» в старшей степени.

(6) Почленно делим числители на знаменатели, и указываем слагаемые, которые стремятся к нулю.

(7) Упрощаем ответ и делаем пометку, что $\dfrac{1}{4}<1$ с выводом о том, что, по признаку Даламбера исследуемый ряд сходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}=1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}+\ldots$.

Имеем $a_n=\dfrac{1}{n!}$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{(n+1)!}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0<1$, следовательно, по признаку Даламбера, данный ряд сходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{10\cdot n^{100}}=\frac{2}{10}+\frac{2^2}{10\cdot 2^{100}}+\frac{2^3}{10\cdot 3^{100}}+\ldots+\frac{2^n}{10\cdot n^{100}}+\ldots\ .$$

Имеем:

$$a_n=\frac{2^n}{10\cdot n^{100}},a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{10\cdot(n+1)^{100}},\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{10\cdot(n+1)^{100}}:\frac{2^n}{10\cdot n^{100}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot 10\cdot n^{100}}{2^n\cdot 10\cdot(n+1)^{100}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot n^{100}}{(n+1)^{100}}=2\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\right)^{100}=2\cdot 1^{100}=2>1,$$

Следовательно, данный ряд расходится.

Признак Коши.

Признак сходимости Коши для положительных числовых рядов чем-то похож на только что рассмотренный признак Даламбера.

Пусть дан ряд с неотрицательными членами. Допустим, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ существует и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ =D. Тогда:

1) если D < 1, то ряд сходится;

2) если D > 1, то ряд расходится.

При $D=1$ **признак не дает ответа**. Нужно использовать другой признак.

Когда нужно использовать радикальный признак Коши? Радикальный признак Коши обычно использует в тех случаях, когда корень $\sqrt[n]{a_n}$ «хорошо» извлекается из общего члена ряда. Как правило, член ряда находится в степени, **которая зависит от** n .

Пример 1. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n+1}{6n+5}\right)^{3n+2}$

Мы видим, что дробь полностью находится под степенью, зависящей от «эн», а значит, нужно использовать радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}\overset{(1)}{=}\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{7n+1}{6n+5}\right)^{3n+2}}\overset{(2)}{=}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{7n+1}{6n+5}\right)^{\frac{3n+2}{n}}\overset{(3)}{=}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{7n+1}{6n+5}\right)^{3+\frac{2}{n}^{\to 0}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{3}\overset{(4)}{=}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{7n+1}{n}}{\frac{6n+5}{n}}\right)^{3}\overset{(5)}{=}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{7+\frac{1}{n}^{\to 0}}{6+\frac{5}{n}^{\to 0}}\right)^{3}\overset{(6)}{=}\left(\frac{7}{6}\right)^{3}=\frac{343}{216}>1$$

Таким образом, исследуемый ряд **расходится**.

Подробное описание решения:

(1) Оформляем общий член ряда под корень.

(2) Переписываем то же самое, только уже без корня, используя свойство степеней $\sqrt[b]{x^a}=x^{\frac{a}{b}}$.

(3) В показателе почленно делим числитель на знаменатель, указывая, что $\frac{2}{n}^{\to 0}$

(4) В результате у нас получилась неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{3}$. Здесь можно было пойти длинным путем: возвести $7n+1$ в куб, возвести $6n+5$ в куб, потом **разделить числитель и знаменатель** на «эн» в кубе. Но в данном случае есть более эффективное решение: этот приём можно использовать прямо под степенью-константой. Для устранения неопределенности делим числитель и знаменатель на n (старшую степень многочленов).

(5) Выполняем почленное деление, и указываем слагаемые, которые стремятся к нулю.

(6) Замечаем, что $\frac{343}{216}>1$ и делаем вывод о том, что ряд расходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}=\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^{2}+\left(\frac{3}{7}\right)^{3}+\ldots+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}+\ldots\ .$$

Имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$, ряд сходится.

1.5. Знакочередующиеся ряды

Определение 1. Ряды, содержащие как положительные, так и отрицательные члены, называются *знакопеременными.*

<u>Определение 2.</u> Ряд называется *знакочередующимся*, если положительные и отрицательные члены следуют друг за другом поочередно.

Что такое знакочередующийся ряд? Это понятно или почти понятно уже из самого названия. Сразу простейший пример.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$ и распишем его подробнее:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n = -1+2-3+4-5+6-7+\ldots$$

У членов знакочередующегося ряда чередуются знаки: плюс, минус, плюс, минус, плюс, минус и т.д. до бесконечности.

Знакочередование обеспечивает множитель $(-1)^n$: если n чётное, то будет знак «плюс», если нечётное – знак «минус»

При исследовании вопросов сходимости можно ограничиться знакочередующимися рядами вида $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots$,
где $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ - положительные числа.

<u>Теорема Лейбница.</u> Знакочередующийся ряд сходится, если:

1) **его члены убывают по модулю** $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$**;**
2) **его общий член стремится к нулю** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$**.**

При этом сумма S ряда удовлетворяет неравенствам $0 \leq S \leq a_1$.

<u>Пример 1.</u> Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$

В общий член ряда входит множитель $(-1)^n$, и это наталкивает на естественную мысль проверить выполнение условий признака Лейбница:

1) Проверка ряда на знакочередование. Обычно в этом пункте решения ряд расписывают подробно $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n = -1+2-3+4-5+\ldots$ и выносят вердикт «Ряд является знакочередующимся».

2) Убывают ли члены ряда по модулю? Здесь нужно решить предел $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|$, который чаще всего является очень простым.

$\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to+\infty}(n) = +\infty \neq 0$ – члены ряда не убывают по модулю, и из этого автоматически следует его расходимость – по той причине, что предела $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n n$ не существует, то есть, не выполнен **необходимый признак сходимости ряда**.

Вывод: ряд расходится.

Пример 2. Ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\ldots$ удовлетворяет условиям теоремы Лейбница, так как $1\geq\frac{1}{2}\geq\frac{1}{3}\geq\ldots\geq\frac{1}{n}\geq\ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Следовательно, данный ряд сходится, причем его сумма меньше $a_1 = 1$.

2. *Выполнить практическую работу (по вариантам):*

Вариант 1

1. Исследовать сходимость ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4^n}$;

Вариант 2

1. Исследовать сходимость ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$;

Вариант 3

1. Исследовать сходимость ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$;

Вариант 4

1. Исследовать сходимость ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^5}$;

Вариант 5

1. Исследовать сходимость ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{5^n}$;

Вариант 6

1. Исследовать сходимость ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$;

1 вариант	Баганов К., Бублик В, Киселев А.
2 вариант	Козлов М., Мехоношина В., Молодцова А.
3 вариант	Силантьев К., Фатуллаев Р., Федотов Н.
4 вариант	Филиппова К., Щекоткин Д., Крайнов А.
5 вариант	Ипполитов Е., Князев А., Мухин М., Нестеров А.
6 вариант	Осипов А., Царев Н., Тюленев Д., Штанько А.

Все практические работы выполнять на отдельных листках (оформлять аккуратно, разборчивым почерком) сфотографировать и отправить на электронную почту: olga.georg.gor@yandex.ru