<u>Тема:</u> Первообразная и неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла. Таблица интегралов. Непосредственное интегрирование.

1. **Прослушать звуковой файл https://yadi.sk/d/MBN5Qj1F2Q1p0A .**
2. **Составить конспект.**

Определение. Функция F(x) называется **первообразной** для функции f(x), если $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$.

Основное свойство первообразной:

Если функция f(x) имеет первообразную F(x), то она имеет бесконечное множество первообразных, причем все они содержатся в выражении F(x) + C, где C - const.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех ее первообразных.

Обозначение: $\int f(x)dx = F(x) + C$

$\int$ - знак интеграла;

$f(x)$ – подынтегральная функция;

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение;

x – переменная интегрирования.

Отыскание неопределенного интеграла называется **интегрированием функции.**

Свойства неопределенного интеграла

1. Неопределенный интеграл дифференциала функции равен этой функции, сложенной с произвольной постоянной

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению $d\int f(x)dx = f(x)dx$

3. $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$

4. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$, где a - const.

5. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

6. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$, то $\int f(u)du = F(u) + C$

Формулы интегрирования

1) $\int dx = x + C$

2) $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$, где $m \neq -1$

3) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

5) $\int e^x dx = e^x + C$

6) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

7) $\int \cos x dx = \sin x + C$

8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C$

9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C$

10) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}x + C$

11) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

14) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

15) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$

16) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

Методы интегрирования

1. *Непосредственное интегрирование*

ПРИМЕР 1.

$\int (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3)dx =$ используя свойства 3 и 4, получим =

$= 2\int x^3 dx - 5\int x^2 dx + 7\int x dx - 3\int dx =$ к первым трем интегралам правой части применим формулу 2, а к четвертому интегралу - формулу 1.

$= 2 \cdot \frac{x^4}{4} - 5 \cdot \frac{x^3}{3} + 7 \cdot \frac{x^2}{2} - 3x + C$

ПРИМЕР 2.

$$\int\left(x+\sqrt{x}-3x^5+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{\sin^2 x}+tg5\right)dx\overset{(1)}{=}$$

$$=\int xdx+\int\sqrt{x}dx-\int 3x^5dx+\int\frac{2dx}{x^3}-\int\frac{dx}{\sin^2 x}+\int tg5dx\overset{(2)}{=}$$

$$=\int xdx+\int x^{\frac{1}{2}}dx-3\int x^5dx+2\int x^{-3}dx-\int\frac{dx}{\sin^2 x}+tg5\int dx\overset{(3)}{=}$$

$$=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{\frac{3}{2}}\cdot x^{\frac{3}{2}}-3\cdot\frac{1}{6}x^6+2\cdot\frac{1}{(-2)}\cdot x^{-2}-(-ctgx)+tg5\cdot x+C\overset{(4)}{=}$$

$$=\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{x^6}{2}-\frac{1}{x^2}+ctgx+tg5\cdot x+C,\ \text{где}\ C=const$$

(1) Применяем правило $\int(u\pm v)dx=\int udx\pm\int vdx$.

(2) Выносим все константы за знаки интегралов. Обратите внимание, что в последнем слагаемом $tg5$ – это константа, её также выносим.

Кроме того, на данном шаге готовим корни и степени для интегрирования. Точно так же, как и при дифференцировании, корни надо представить в виде $x^{\frac{a}{b}}$. Корни и степени, которые располагаются в знаменателе – перенести вверх.

(3) Все интегралы у нас табличные. Осуществляем превращение с помощью таблицы, используя формулы 1), 2), 9).

(4) Записываем полученный результат в более компактном виде, все степени вида $x^{\frac{a}{b}}$ снова представляем в виде корней, степени с отрицательным показателем – сбрасываем обратно в знаменатель.

Проверка. Для того чтобы выполнить проверку нужно продифференцировать полученный ответ:

$$\left(\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{x^6}{2}-\frac{1}{x^2}+ctgx+tg5\cdot x+C\right)'=$$

$$=\frac{1}{2}(x^2)'+\frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'-\frac{1}{2}(x^6)'-(x^{-2})'+(ctgx)'+tg5\cdot(x)'+(C)'=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2x+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\cdot 6x^5-(-2)\cdot(x^{-3})-\frac{1}{\sin^2 x}+tg5\cdot 1+0$$

$$=x+\sqrt{x}-3x^5+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{\sin^2 x}+tg5$$

ПРИМЕР 3.

$$\int \frac{3x^4+2x^2-3x+7}{x^2}dx = \int\left(\frac{3\mathrm{x}^4}{\mathrm{x}^2}+\frac{2\mathrm{x}^2}{\mathrm{x}^2}-\frac{3\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2}+\frac{7}{\mathrm{x}^2}\right)dx =$$

$$= \int\left(3x^2+2-\frac{3}{x}+\frac{7}{\mathrm{x}^2}\right)dx =$$

$$= \int\left(3x^2+2-\frac{3}{x}+7x^{-2}\right)dx = 3\frac{x^3}{3}+2x-3lnx+7\frac{x^{-1}}{-1}+C =$$

$$= x^3+2x-3lnx-\frac{7}{x}+C$$

ПРИМЕР 4.

$$\int \frac{3x^2\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int \frac{3x^2\cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}}dx$$

$$= \int 3x^{2+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}dx$$

$$= 3\int x^{\frac{12+3-4}{6}}dx = 3\int x^{\frac{11}{6}}dx = 3\frac{x^{\frac{11}{6}+1}}{\frac{11}{6}+1}+C = \frac{18}{17}x^{\frac{17}{6}}+C$$

$$= \frac{18}{17}x^2\cdot\sqrt[6]{x^5}+C$$

ПРИМЕР 5.

$$\int \frac{dx}{4+3x^2} = \int \frac{dx}{3\left(\frac{4}{3}+x^2\right)} =$$

$$= \int \frac{dx}{3\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+x^2\right)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}}arctg\frac{x}{\frac{2}{\sqrt{3}}}+C = \frac{\sqrt{3}}{6}arctg\frac{\sqrt{3}x}{2}+C$$

ПРИМЕР 6.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2+4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{25\left(x^2+\frac{4}{25}\right)}} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2}} = \frac{1}{5}ln\left|x+\sqrt{x^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2}\right|+C$$

3.Вычислить интегралы (по вариантам, в рабочих тетрадях):

Вариант 1

$\int\left(5\cos x-3x^2+\frac{1}{x}\right)dx$; $\int\frac{dx}{1+16x^2}$

Вариант 2

$\int\frac{3x^8-x^5+x^4}{x^5}dx$; $\int\frac{dx}{1+9x^2}$

Вариант 3

$\int\left(6\sin x+4x^3-\frac{1}{x}\right)dx$; $\int\frac{dx}{1+4x^2}$

Вариант 4

$\int\left(5\cos x-3x^2+\frac{1}{x}\right)dx$ $\int\frac{dx}{1+16x^2}$.

Вариант 5

$\int\left(6\sin x+4x^3-\frac{1}{x}\right)dx$ $\int\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$.

Вариант 6

$\int\frac{4+x\cdot\cos x}{x}dx$ $\int\left(3\cos x+4x^2+\frac{1}{x}\right)dx$

1 вариант	Баганов К., Бублик В, Киселев А.
2 вариант	Козлов М., Мехоношина В., Молодцова А.
3 вариант	Силантьев К., Фатуллаев Р., Федотов Н.
4 вариант	Филиппова К., Щекоткин Д., Крайнов А.
5 вариант	Ипполитов Е., Князев А., Мухин М., Нестеров А.
6 вариант	Осипов А., Царев Н., Тюленев Д., Штанько А.

Все практические работы выполнять на отдельных листках (оформлять аккуратно, разборчивым почерком) сфотографировать и отправить на электронную почту: olga.georg.gor@yandex.ru