<u>Тема:</u> Общая схема исследования функций и построения их графиков

1. **Повторить материал предыдущего урока.**
2. **Прослушать звуковой файл https://yadi.sk/d/-jkgn_YrI8ADOw , одновременно читая лекцию.**
3. **Составить конспект.**

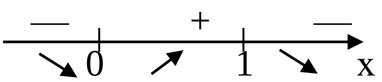
При исследовании функций и построении их графиков рекомендуется использовать следующую **схему:**

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на четность, нечетность.
3. Исследовать функцию на периодичность.
4. Найти интервалы непрерывности функции, найти точки разрыва и определить их род.
5. Найти первую производную функции, критические точки первого рода.
6. Найти интервалы монотонности, точки экстремума и экстремумы функции.
7. Найти вторую производную функции, критические точки второго рода.
8. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба.
9. Найти асимптоты графика функции.
10. Найти точки пересечения графика функции с осями координат (если это возможно).
11. Построить график функции.

Пример 1. Исследовать функцию и построить ее график: $y = 3x^2 - 2x^3$.

Решение. 1. Область определения функции – все действительные числа.

2. $y(-x) = 3(-x)^2 – 2(- x)^3 = 3x^2 + 2x^3$ – функция не является ни четной, ни нечетной.
3. Функция не является периодической.
4. Функция является непрерывной на множестве всех действительных чисел. Точек разрыва нет.
5. Найдем производную функции:
   $y' = 3\cdot 2x - 2\cdot 3x^2 = 6x – 6x^2 = 6x\cdot(1 – x)$.
   Найдем критические точки первого рода: $D(y') = R$;
   $y' = 0$; $6x\cdot(1 – x) = 0$; $x = 0$; $x = 1$ – критические точки первого рода.
6. Найдем интервалы монотонности и экстремумы функции.
   Определим знаки первой производной слева и справа от критических точек:



На интервалах $(-\infty; 0)$ и $(1; +\infty)$ функция убывает, на интервале $(0; 1)$ функция возрастает.

0 – точка минимума; $y(0) = 3\cdot 0^2 - 2\cdot 0^3 = 0$ – минимум функции.

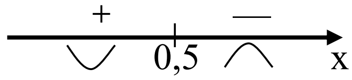
1 – точка максимума; $y(1) = 3\cdot 1^2 - 2\cdot 1^3 = 1$ – максимум функции.

7. Найдем вторую производную функции:
   $y'' = (6x – 6x^2)' = 6 – 12x = 6\cdot(1 – 2x)$.
   Найдем критические точки второго рода: $D(y'') = R$;

$y^{//} = 0$; $6\cdot(1 - 2x) = 0$; $x = 0,5$ – критическая точка второго рода.

8. Найдем интервалы выпуклости и точки перегиба.

Определим знаки второй производной слева и справа от критической точки второго рода:



На интервале $(-\infty; 0,5)$ график функции вогнутый, на интервале $(0,5;+\infty)$ график функции выпуклый.

$y(0,5) = 3\cdot(0,5)^2 - 2\cdot(0,5)^3 = 0,5$; $(0,5; 0,5)$ – точка перегиба графика функции.

9. Найдем асимптоты графика функции.

Вертикальных асимптот нет, так как нет точек разрыва. Наклонные асимптоты будем искать в виде $y = kx + b$, где

$k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - 2x^3}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}(3x - 2x^2) = \infty$ $\rightarrow$ наклонных и горизонтальных асимптот нет.

10. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат:

$x = 0$; $y = 0$; $(0;0)$ – точка пересечения с осью абсцисс и осью ординат,

$y = 0$; $3x^2 - 2x^3 = 0$; $x^2(3 - 2x) = 0$; $x = 0$; $x = 1,5$

$(0;0)$; $(1,5; 0)$ – точки пересечения с осью абсцисс.

11. Построим график функции (рис. 1).

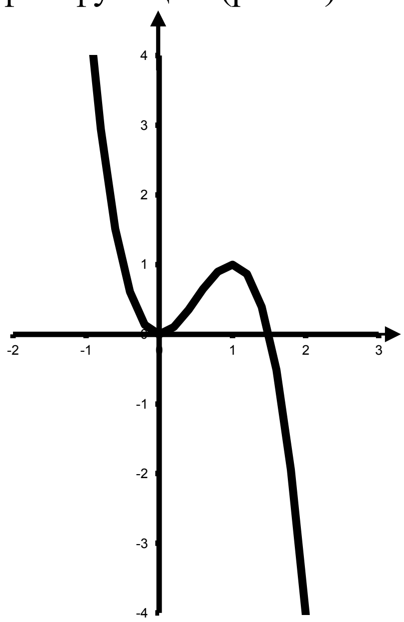


Рис 1.

Пример 2. Исследовать функцию и построить ее график: $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x+1}$.

Решение. 1. Найдем область определения функции:

$x + 1 \neq 0$, $x \neq -1$, $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

2. Исследуем функцию на четность и нечетность. Функция не является ни четной, ни нечетной, так как ее область определения не симметрична относительно начала координат.

3. Функция не является периодической.

4. -1 – точка разрыва функции. Определим ее род:

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{(x-1)^2}{x+1}=\left[\frac{(-1-1)^2}{-1-0+1}\right]=\left[\frac{4}{-0}\right]=-\infty;\ \lim_{x\to -1+0}\frac{(x-1)^2}{x+1}=\left[\frac{(-1-1)^2}{-1+0+1}\right]=\left[\frac{4}{+0}\right]=+\infty,$$

следовательно, -1 – точка разрыва второго рода;

x = -1 – вертикальная асимптота графика функции.

5. Найдем производную функции:

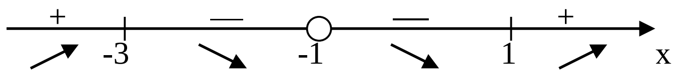
$$f^{/}(x)=\left(\frac{x^2-2x+1}{x+1}\right)^{/}=\frac{(x^2-2x+1)^{/}\cdot(x+1)-(x^2-2x+1)\cdot(x+1)^{/}}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{(2x-2)\cdot(x+1)-(x^2-2x+1)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{2x^2-2x+2x-2-x^2+2x-1}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{(x+3)\cdot(x-1)}{(x+1)^2}.$$

D(f $^{/}$(x)) = D(f(x)); f $^{/}$(x) = 0; x = - 3; x = 1 – критические точки первого рода.

6. Найдем интервалы монотонности и экстремумы функции. Определим знаки первой производной слева и справа от критических точек и точек разрыва функции:



На интервалах (- ∞; - 3) и (1; +∞) функция возрастает, на интервалах (- 3; - 1) и (- 1; 1) – убывает.

- 3 – точка максимума функции, $f(-3)=\frac{(-3-1)^2}{-3+1}=\frac{16}{-2}=-8$ - максимум функции;

1 – точка минимума функции, $f(1)=\frac{(1-1)^2}{1+1}=\frac{0}{2}=0$ - минимум функции.

7. Найдем вторую производную функции:

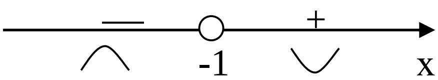
$$f^{//}(x)=\left(\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}\right)^{/}=\frac{(x^2+2x-3)^{/}\cdot(x+1)^2-(x^2+2x-3)\cdot((x+1)^2)^{/}}{((x+1)^2)^2}=$$

$$=\frac{(2x+2)\cdot(x+1)^2-(x^2+2x-3)\cdot 2\cdot(x+1)\cdot 1}{(x+1)^4}=\frac{2\cdot(x+1)((x+1)^2-(x^2+2x-3))}{(x+1)^4}=$$

$$=\frac{2\cdot(x^2+2x+1-x^2-2x+3)}{(x+1)^3}=\frac{8}{(x+1)^3}.$$

Критических точек второго рода нет, так как D(f $^{//}$(x)) = D(f(x)) и $\frac{8}{(x+1)^3}\neq 0$.

8. Найдем интервалы выпуклости графика функции. Определим знаки второй производной слева и справа от точки разрыва функции:



На интервале (-∞; - 1) график функции выпуклый, на интервале (- 1; +∞) график функции вогнутый. Точек перегиба нет, так как нет критических точек второго рода.

9. Найдем асимптоты графика функции. В п. 4 показано, что x = -1 – вертикальная асимптота графика функции.

Наклонные (горизонтальные) асимптоты будем искать в виде y = кx +b, где

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^2}{(x+1)\cdot x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{x^2+x}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(x-1)^2}{x+1}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2x+1-x^2-x}{x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x+1}{x+1}=-3.$$

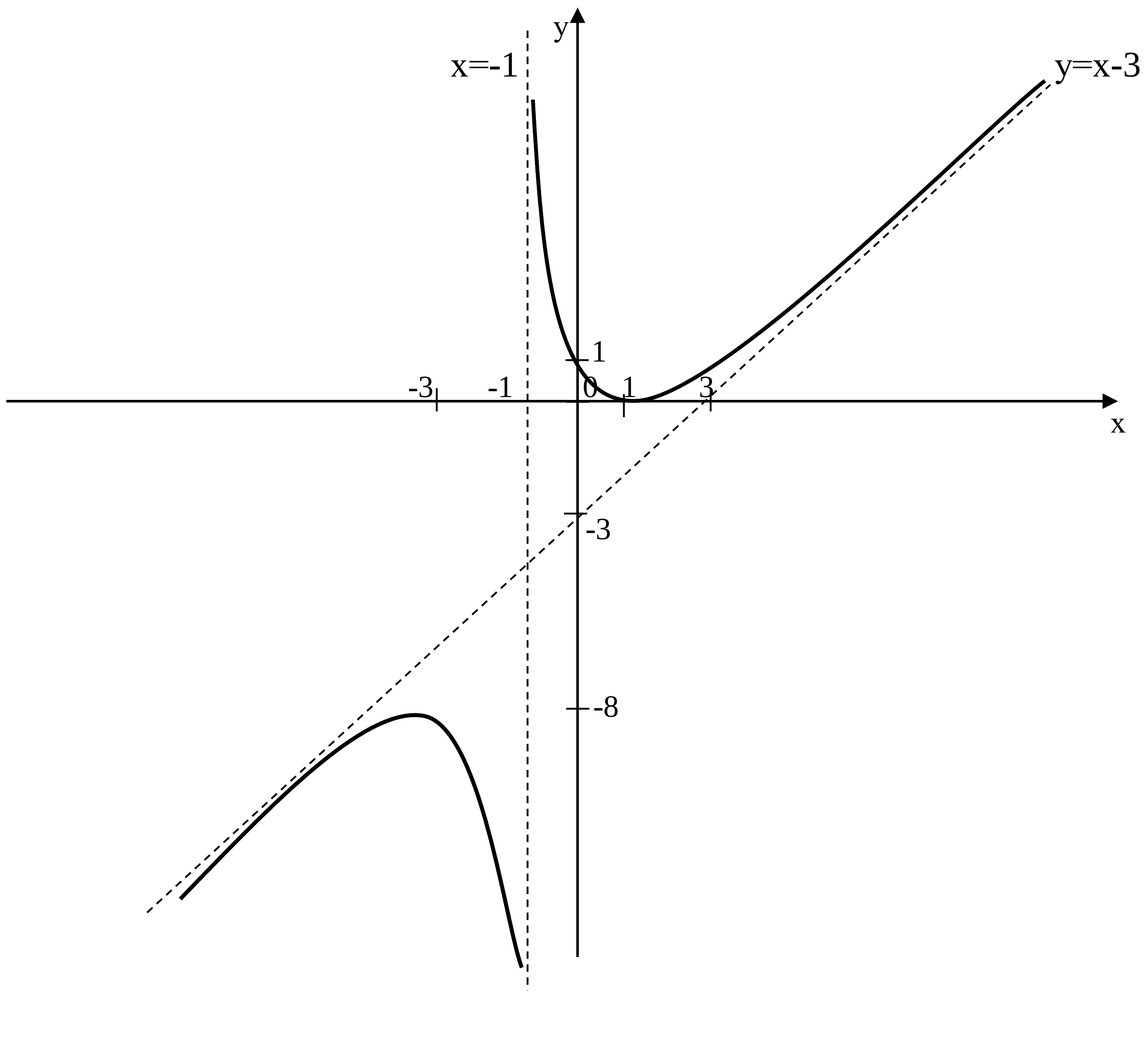
Таким образом, y = x – 3 – наклонная асимптота графика функции.

10. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат:

x = 0; $f(0)=\frac{(0-1)^2}{0+1}=1$; (0; 1) - точка пересечения график с осью ординат;

y = 0; $\frac{(x-1)^2}{x+1}=0; x=1$; (1; 0) – точка пересечения графика с осью абсцисс.

11. Построим график функции (рис. 2).



4. Выполнить практическую работу

Провести полное исследование и построить графики функций.

Вариант 1,2	Вариант 3,4	Вариант 5,6
$y = 6x^2 – x^3$	$y = x^3 – x$	$y = 5x^3 – 3x^5$

1 вариант	Баганов К., Бублик В, Киселев А.
2 вариант	Козлов М., Мехоношина В., Молодцова А.
3 вариант	Силантьев К., Фатуллаев Р., Федотов Н.
4 вариант	Филиппова К., Ипполитов Е., Крайнов А.
5 вариант	Щекоткин Д., Князев А., Мухин М., Нестеров А.
6 вариант	Осипов А., Царев Н., Тюленев Д., Штанько А.

Все практические работы выполнять на отдельных листках (оформлять аккуратно, разборчивым почерком) сфотографировать и отправить на электронную почту: olga.georg.gor@yandex.ru