<u>Тема:</u> Применение производной к исследованию функции.

1. **Прослушать звуковой файл https://yadi.sk/d/nfRgGjFoXDE0Ag , одновременно читая лекцию.**
2. **Составить конспект (записать определения, примеры, выполнить чертежи).**

1) Исследование функции по первой производной: монотонность, точки экстремума

Наибольшее и наименьшее значения функции

Монотонность функции

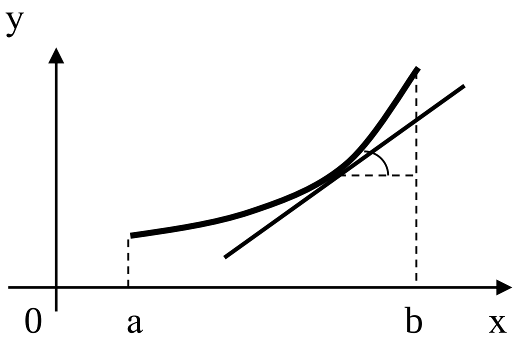
Условия возрастания и убывания функции

Если в каждой точке интервала (a,b):

1) $f'(x) > 0$, то функция $y = f(x)$ монотонно возрастает на (a,b).
2) $f'(x) < 0$, то функция $y = f(x)$ монотонно убывает на (a,b).

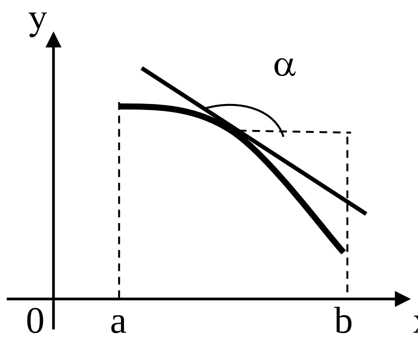
Геометрическая интерпретация условия монотонности функции

Если касательные к кривой на некотором промежутке направлены под острыми углами к оси абсцисс (рис. 1а), то функция возрастает, если под тупыми углами (рис. 1б), то функция убывает.



$f'(x) > 0, \quad 0^\circ < \alpha < 90^\circ$

Рис. 1а



$f'(x) < 0, \quad 90^\circ < \alpha < 180^\circ$

Рис. 1б

Условие постоянства функции

Функция $y = f(x)$ постоянна на интервале (a,b) тогда и только тогда, когда $f'(x) = 0$ в каждой точке этого интервала.

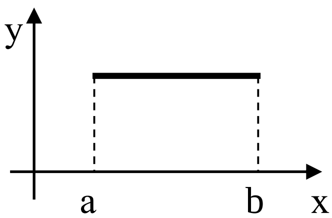


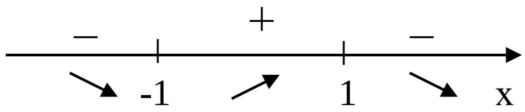
Рис. 2

Пример 1. Найти интервалы монотонности функции $y = 3x - x^3$.

Решение. Найдем производную функции $y' = 3 - 3x^2 = 3(1 - x^2) = 3(1 - x)(1 + x)$

$y' = 0$; $3(1 - x)(1 + x) = 0$; $x = -1$; $x = 1$.

Определим знаки производной функции слева и справа от точек -1 и 1:



Функция убывает на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ и возрастает на интервале $(-1; 1)$.

Экстремумы функции

- Точка x_o называется **точкой максимума** функции $y = f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_o выполняется неравенство $f(x) < f(x_o)$.
- Точка x_o называется **точкой минимума** функции $y = f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_o выполняется неравенство $f(x) > f(x_o)$.
- Значения функции в точках минимума и максимума называются соответственно **минимумами** и **максимумами** функции.
- Максимум и минимум функции объединяются общим названием **экстремума** функции.

Замечание. Экстремум функции часто называют локальным экстремумом, подчеркивая тот факт, что понятие экстремума связано лишь с достаточно малой окрестностью точки x_o. На одном промежутке функция может иметь несколько экстремумов, причем может получиться, что минимум в одной точке больше максимума в другой, например, на рис.3 $f_{min}(x_2) > f_{max}(x_o)$. Кроме того, наличие максимума (или минимума) в отдельной точке промежутка вовсе не означает, что в этой точке функция принимает наибольшее (наименьшее) значение на этом промежутке или, как говорят, имеет глобальный максимум (минимум).

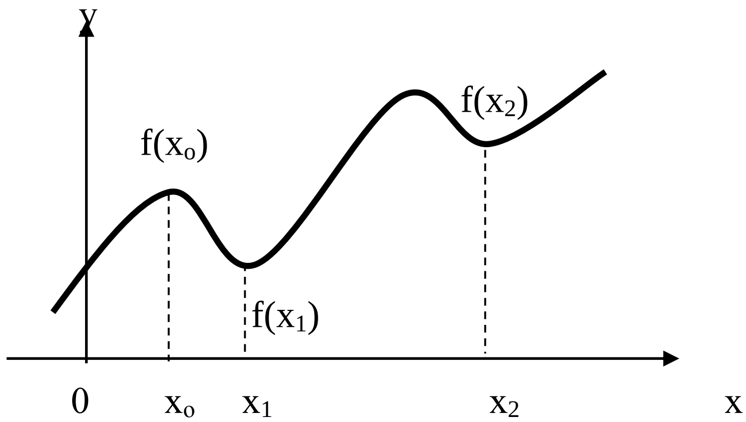


Рис. 3

Понятно, что если x_o – точка экстремума функции $y = f(x)$, то в этой точке производная равна 0 или не существует.

- **Внутренние точки области определения функции, в которых $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует, называются критическими точками функции первого рода.**

Следовательно, если в какой-либо точке имеется экстремум, то это критическая точка первого рода.

Очень важно, однако, заметить, что обратное утверждение неверно: критическая точка не обязательно является точкой экстремума (рис. 4).

f ′(x) = 0 f ′(x) не существует

Рис. 4

Для того чтобы ответить на вопрос, когда критическая точка первого рода является точкой экстремума, и указать, какой именно экстремум – максимум или минимум, сформулируем теорему, которая называется ***достаточным условием экстремума.***

Достаточное условие экстремума функции

Пусть x_o - критическая точка функции первого рода. Если при переходе через точку x_o производная функции меняет свой знак, то x_o – точка экстремума функции $y = f(x)$.
Если $f'(x)$ меняет свой знак с «+» на «-», то x_o – точка максимума функции.
Если $f'(x)$ меняет свой знак с «-» на «+», то x_o – точка минимума функции (рис. 5).

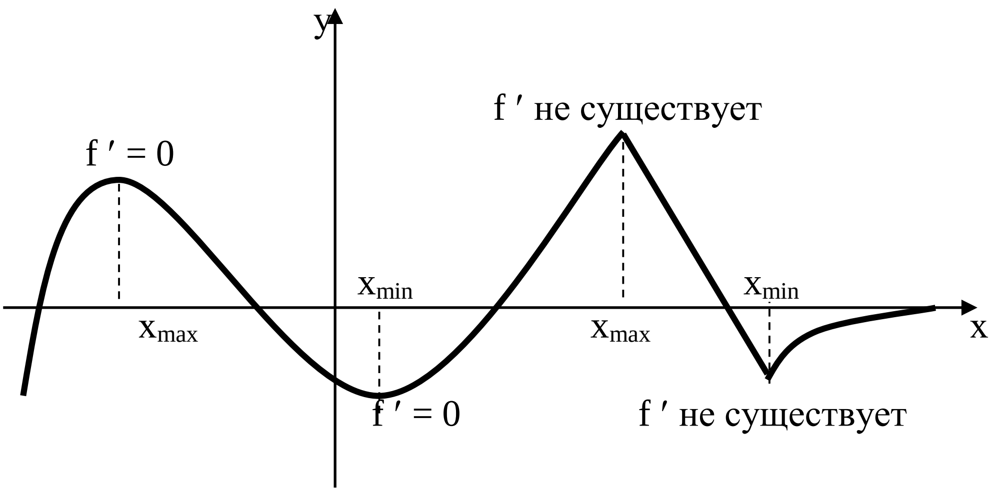
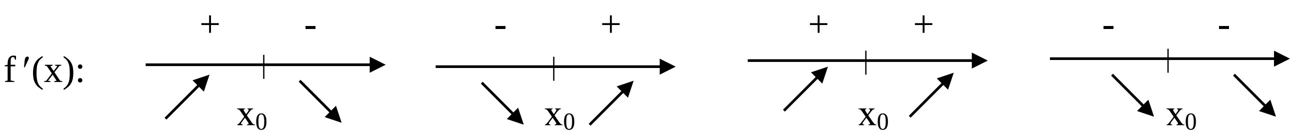


Рис.5

Чтобы наглядно представить это, изобразим все возможные случаи расположения знаков производной функции слева и справа от критической точки:



max min экстремумов нет

Схема исследования функции y = f(x) на экстремум

1. Найти производную $y = f'(x)$.
2. Найти критические точки первого рода функции.
3. Исследовать знак производной слева и справа от каждой критической точки и сделать вывод о наличии точек экстремума (максимума и минимума).
4. Найти экстремумы (экстремальные значения) функции.

Пример 2. Найти точки экстремума для функции $y = 3x - x^3$.

Решение.1.Найдем производную функции $y' = 3 - 3x^2 = 3(1 - x^2) = 3(1 - x)(1+x)$.

2. Найдем критические точки первого рода функции.

Производная функции существует на множестве действительных чисел.

$y' = 0$; $3(1 - x)(1 + x) = 0$; $x = -1$; $x = 1$–критические точки первого рода.

3.Определим знаки производной функции слева и справа от точек -1 и 1:

$$\begin{array}{ccccc} - & & + & & - \\ \searrow & -1 & \nearrow & 1 & \searrow \quad x \end{array}$$

- 1 – точка минимума, так как при переходе через эту точку $f'(x)$ меняет свой знак с «-» на «+»;

1 – точка максимума, так как при переходе через эту точку $f'(x)$ меняет свой знак с «+» на «-».

4. Найдем значения функции в точках -1 и 1:

$f_{min} = f(-1) = 3\cdot(-1) - (-1)^3 = -3 + 1 = -2$;

$f_{max} = f(1) = 3\cdot1 - 1^3 = 3 - 1 = 2$.

2) Исследование функции по второй производной: выпуклость (вогнутость) графика функции, точки перегиба

В предыдущем параграфе мы подробно рассмотрели, как, исследовав первую производную функции, можно во многом определить структуру графика функции. Рассмотрим теперь, как, исследовав вторую производную функции, можно более точно построить ее график.

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в каждой точке промежутка $(a;b)$.

- Если на промежутке $(a; b)$ график функции $y = f(x)$ расположен выше любой касательной, проведенной в точке этого промежутка, то функция называется **вогнутой** на этом промежутке (рис. 1а).
- Если на промежутке $(a; b)$ график функции $y = f(x)$ расположен ниже любой касательной, проведенной в точке этого промежутка, то функция называется **выпуклой** на этом промежутке (рис. 1б).

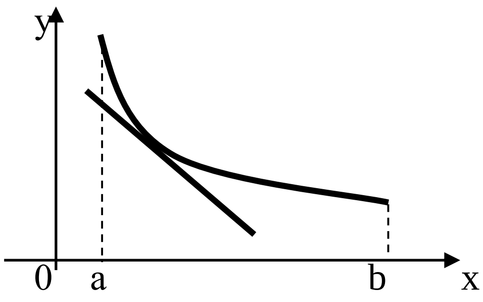


Рис. 1а

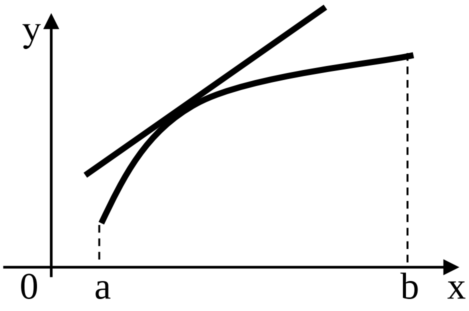


Рис. 1б

Приведем без доказательства теорему, с помощью которой находят интервалы выпуклости и вогнутости графика функции.

Достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика функции

Пусть функция $y = f(x)$ имеет вторую производную на интервале $(a; b)$.
Если $f''(x) > 0$ во всех точках интервала $(a; b)$, то функция $y = f(x)$ вогнута на этом промежутке.
Если $f''(x) < 0$ во всех точках интервала $(a; b)$, то функция $y = f(x)$ выпукла на этом промежутке.

•**Точкой перегиба** графика непрерывной функции называется точка, разделяющая интервалы, в которых функция выпукла и вогнута.

Понятно, что если x_o – точка перегиба графика функции, то в этой точке вторая производная функции либо равна 0, либо не существует.

•Точки, в которых $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не существует, называются **критическими точками второго рода.**

Точки перегиба следует искать среди критических точек второго рода. Однако заметим, что обратное утверждение неверно: критическая точка второго рода не обязательно является точкой перегиба. Например:

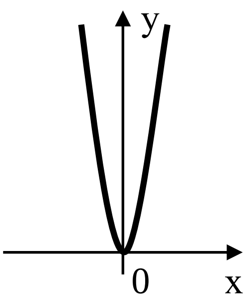


Рис. 2

$y = x^4$; $y' = 4x^3$; $y'' = 12x^2$
$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Точка $x = 0$ является критической точкой второго рода, но не является точкой перегиба (рис.2)

Достаточное условие перегиба

Пусть x_o – критическая точка второго рода. Если при переходе через эту точку вторая производная функции меняет свой знак, то x_o – точка перегиба графика функции $y = f(x)$.

Схема исследования функции на выпуклость и точки перегиба

1. Найти вторую производную $f''(x)$.
2. Найти критические точки второго рода.
3. Исследовать знак второй производной слева и справа от найденных критических точек и сделать вывод об интервалах выпуклости и вогнутости, наличии точек перегиба.
4. Найти значения функции в точках перегиба, т. е. найти точки перегиба функции.

Пример 1. Найти интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба функции $y = 3x - x^3$.

Решение. 1. Находим, что $y' = 3 - 3x^2$; $y'' = (3 - 3x^2)' = -6x$.

2. Находим критические точки второго рода: вторая производная существует на всей числовой оси;

$y'' = 0$ при $x = 0$ – критическая точка второго рода.

3. Отметим, что $y'' > 0$ при $x < 0$, следовательно, функция вогнута на интервале $(-\infty; 0)$; $y'' < 0$ при $x > 0$, следовательно, функция выпукла на интервале $(0; +\infty)$.

Таким образом, точка $x = 0$ является точкой перегиба.

4. Так как $y(0) = 0$, то точка перегиба графика функции – $(0;0)$.

3. Асимптоты графика функции

• Прямая L называется **асимптотой графика функции** $y = f(x)$, если расстояние от некоторой точки $M(x; y)$, лежащей на графике, до этой прямой L приближается к нулю при стремлении хотя бы одной из координат точки $M(x; y)$ к бесконечности.

Существует два вида асимптот: ***вертикальные* и *наклонные*** (в частности – ***горизонтальные***).

• Прямая $x = a$ называется **вертикальной асимптотой графика функции** $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$.

Вертикальные асимптоты находятся среди точек разрыва функции.

• Прямая $y = kx + b$ называется **наклонной асимптотой графика функции** $y = f(x)$, если существуют конечные пределы: при $x \to +\infty$ (правая наклонная асимптота)

$$k_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}; b_1 = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx),$$

при $x \to -\infty$ (левая наклонная асимптота) $k_2 = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}; b_2 = \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - kx)$

Замечание. В некоторых случаях функция асимптотически приближается к одной и той же прямой при x $\to +\infty$ и при x $\to -\infty$, тогда наклонная асимптота будет одна при $x\to\pm\infty$.

• При к =0 прямая y = кx + b примет вид y=b и наклонная асимптота будет **горизонтальной**.

Пример. Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^2+2x-1}{x}$.

Решение. а) Вертикальные асимптоты находятся среди точек разрыва, то есть в нашем случае рассматриваем точку x = 0:

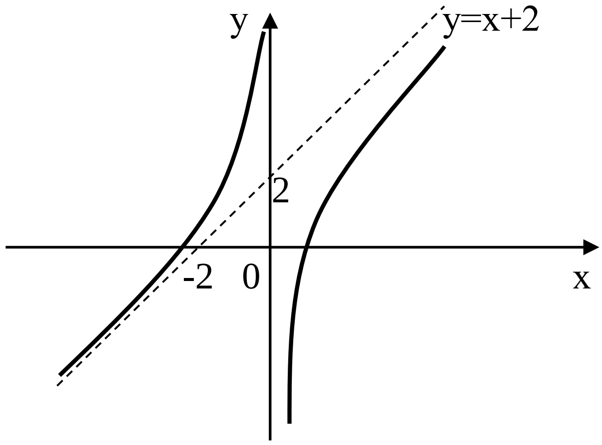
$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 0-0} f(x) &= \lim_{x\to 0-0}\frac{x^2+2x-1}{x} = \left[\frac{-1}{-0}\right] = +\infty\\ \lim_{x\to 0+0} f(x) &= \lim_{x\to 0+0}\frac{x^2+2x-1}{x} = \left[\frac{-1}{+0}\right] = -\infty\end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 0 \text{ – вертикальная асимптота.}$$

б) Исследуем поведение функции при $x\to\pm\infty$, то есть найдем наклонные (горизонтальные) асимптоты y = кx + b:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x-1}{x\cdot x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x-1}{x^2} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x-1-x^2}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x} = 2.$$

Таким образом, имеется наклонная асимптота y = x + 2



3. Ответить на контрольные вопросы (устно).

1. Необходимые и достаточные условия возрастания и убывания функции.

2. Определения точек экстремума и экстремумов функции.
3. Определение критических точек функции первого рода.
4. Необходимое условие существования экстремума.
5. Достаточные условия существования экстремумов.
6. Определения функций, выпуклых и вогнутых на интервале.
7. Достаточные условия выпуклости (вогнутости) графика функции.
8. Определение критических точек функции второго рода.
9. Определение точки перегиба функции.
10. Достаточное условие перегиба.
11. Определение вертикальной, наклонной, горизонтальной асимптот графика функции.