

<https://yadi.sk/d/SEn4OvHSDWUh7Q>

**Тема:** Понятие определенного интеграла. Свойства определенного интеграла.  
**Задача о нахождении площади криволинейной трапеции. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление определенного интеграла.**

1. *Посмотреть презентацию «Определенный интеграл и его свойства».*  
<https://yadi.sk/i/FMn08LUSK7vKRA>
2. *Изучить теоретический материал, составить конспект.*

1. Пусть функция  $y = f(x)$  определена на отрезке  $[a, b]$ .

Если при любом разбиении отрезка  $[a, b]$  на части и при любом выборе точек на каждой части интегральная сумма стремится к одному и тому же пределу, то его называют **определенным интегралом**

$$\int_a^b f(x) dx$$

и обозначают:

Что прибавилось по сравнению с неопределенным интегралом? Прибавились *пределы интегрирования*.

*Нижний предел интегрирования* стандартно обозначается буквой  $a$ .

*Верхний предел интегрирования* стандартно обозначается буквой  $b$ .

Отрезок  $[a, b]$  называется *отрезком интегрирования*.

### **Теорема существования определенного интеграла.**

Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то предел интегральной суммы существует и не зависит от способа разбиения отрезка  $[a, b]$  на элементарные отрезки и от выбора точек  $\xi_i$ .

Если  $f(x) > 0$  на отрезке  $[a, b]$ , то определенный интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  геометрически представляет собой площадь криволинейной трапеции-фигуры, ограниченной линиями  $y = f(x)$ ,  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = 0$ .

### **Основные свойства определенного интеграла.**

$$1. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$2. \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$3. \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$4. \int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx$$

5.  $\int_a^b C f(x) dx = C \int_a^b f(x) dx$ , где  $C$  - const.

6. Оценка определенного интеграла:

Если  $m \leq f(x) \leq M$  на отрезке  $[a, b]$ , то  $m(b - a) < \int_a^b f(x) dx < M(b - a)$

### Правила вычисления определенного интеграла

#### 1. Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где  $F(x)$ -первообразная для  $f(x)$ .

1) Сначала находим первообразную функцию  $F(x)$  (неопределенный интеграл). Обратите внимание, что константа  $C$  в определенном интеграле **не добавляется**. Обозначение  $\Big|_a^b$  является чисто техническим, и вертикальная палочка не несет никакого математического смысла, по сути – это просто отчеркивание.

2) Подставляем значение верхнего предела в первообразную функцию:  $F(b)$ .

3) Подставляем значение нижнего предела в первообразную функцию:  $F(a)$ .

4) Рассчитываем разность  $F(b) - F(a)$ , то есть, находим число.

#### Пример 1

Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^2 2x^2 dx$$

Решение:

$$\int_1^2 2x^2 dx \stackrel{(1)}{=} 2 \int_1^2 x^2 dx \stackrel{(2)}{=} \frac{2}{3} (x^3) \Big|_1^2 \stackrel{(3)}{=} \frac{2}{3} (2^3 - 1^3) = \frac{2}{3} (8 - 1) = \frac{2}{3} \cdot 7 = \frac{14}{3} = 4 \frac{2}{3}$$

(1) Выносим константу за знак интеграла.

(2) Интегрируем по таблице с помощью формулы  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ . Появившуюся константу  $\frac{1}{3}$  целесообразно отделить от  $x^3$  и вынести за скобку. Делать это не обязательно, но желательно – зачем лишние вычисления?

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

(3) Используем формулу Ньютона-Лейбница  $\Big|_a^b$ . Сначала подставляем в  $x^3$  верхний предел, затем – нижний предел. Проводим дальнейшие вычисления и получаем окончательный ответ.

## Пример 2

Вычислить определенный интеграл

$$\int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2) dx$$

Решение:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2) dx &= \left( 8x + x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^4 = \\ &= \left( 32 + 16 - \frac{64}{3} \right) - \left( -16 + 4 + \frac{8}{3} \right) = \frac{80}{3} + \frac{28}{3} = 36 \end{aligned}$$

**Совет: перед тем, как использовать формулу Ньютона-Лейбница, полезно провести проверку: а сама-то первообразная найдена правильно?**

Так, применительно к рассматриваемому примеру: перед тем, как в первообразную

функцию  $8x + x^2 - \frac{x^3}{3}$  подставлять верхний и нижний пределы, желательно на черновике проверить, а правильно ли вообще найден неопределенный интеграл? Дифференцируем:

$$\left( 8x + x^2 - \frac{x^3}{3} \right)' = 8(x)' + (x^2)' - \frac{1}{3}(x^3)' = 8 \cdot 1 + 2x - \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = 8 + 2x - x^2$$

Получена исходная подынтегральная функция, значит, неопределенный интеграл найден верно. Теперь можно и формулу Ньютона-Лейбница применить.

**Такая проверка будет не лишней при вычислении любого определенного интеграла.**

## Пример 3.

Вычислить определенный интеграл.

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (1^2 - 0^2) = \frac{1}{2}.$$

## 2. Замена переменной в определенном интеграле

Для определенного интеграла справедливы все типы замен, что и для неопределенного интеграла. Таким образом следует повторить урок [Методы интегрирования](#).

Здесь нет ничего страшного или сложного. Новизна состоит в вопросе, **как поменять пределы интегрирования при замене.**

## Пример 4

Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\sqrt{5}} \frac{x dx}{\sqrt{x^4 + 16}}$$

Главный вопрос здесь вовсе не в определенном интеграле, а в том, как правильно провести замену. Смотрим в [таблицу интегралов](#) и прикидываем, на что у нас больше всего похожа

подынтегральная функция? Очевидно, что на длинный логарифм:  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + A} \right| + C$ .

Но в табличном интеграле под корнем  $x^2$ , а в нашем – «икс» в четвертой степени. Из рассуждений

следует и идея замены – неплохо бы нашу четвертую степень как-нибудь превратить в квадрат. Это реально.

Сначала готовим наш интеграл к замене:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{x^4 + 16}} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{(x^2)^2 + 16}} = (*)$$

Из вышеуказанных соображений совершенно естественно напрашивается замена:  $t = x^2$ . Таким образом, в знаменателе будет всё хорошо:  $\sqrt{t^2 + 16}$ . Выясняем, во что превратится оставшаяся часть  $x dx$  подынтегрального выражения, для этого находим дифференциал  $dt$ :

$$dt = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{dt}{2}$$

По сравнению с заменой в неопределенном интеграле у нас добавляется дополнительный этап.

**Находим новые пределы интегрирования.**

Это достаточно просто. Смотрим на нашу замену  $t = x^2$  и старые пределы интегрирования  $a = 0$ ,  $b = \sqrt{3}$ .

Сначала подставляем в выражение замены  $t = x^2$  нижний предел интегрирования, то есть, ноль:

$$t_1 = 0^2 = 0$$

Потом подставляем в выражение замены  $t = x^2$  верхний предел интегрирования, то есть, корень из трёх:

$$t_2 = (\sqrt{3})^2 = 3$$

Продолжаем решение.

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{1}{2} \int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 16}} \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2} \left( \ln \left| t + \sqrt{t^2 + 16} \right| \right) \Big|_0^3 \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{2} \left( \ln(3 + \sqrt{25}) - \ln(0 + \sqrt{0 + 16}) \right) = \\ &= \frac{1}{2} (\ln 8 - \ln 4) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{8}{4} \right) = \frac{\ln 2}{2} \approx 0,35 \end{aligned}$$

(1) В соответствии с заменой записываем **новый интеграл с новыми пределами интегрирования.**

(2) Это простейший табличный интеграл, интегрируем по таблице. Константу  $\frac{1}{2}$  лучше оставить за скобками (можно этого и не делать), чтобы она не мешалась в дальнейших вычислениях. Справа отчеркиваем линию с указанием новых пределов интегрирования  $\Big|_0^3$  – это подготовка для применения формулы Ньютона-Лейбница.

$$\int_a^b f(x) dx = F(X) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

(3) Используем формулу Ньютона-Лейбница  $\int_a^b$ .

Ещё одно отличие от неопределенного интеграла состоит в том, что, после того, как мы провели замену, **никаких обратных замен проводить не надо.**

### Пример 5

$\int_0^1 \frac{x dx}{(1+x^2)^3}$ . Сделаем замену переменной:  $t = 1 + x^2$ ,  $\frac{dt}{2} = x dx$ . Изменим пределы интегрирования:

при  $x = 0$  получим  $t = 1 + 0^2 = 1$ , при  $x = 1$   $t = 1 + 1^2 = 2$ .

$$\int_0^1 \frac{x dx}{(1+x^2)^3} = \int_1^2 \frac{1}{2} \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2} \int_1^2 t^{-3} dt = -\frac{1}{4} \frac{1}{t^2} \Big|_1^2 = -\frac{1}{4} \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2} \right) = -\frac{3}{16}.$$

### Пример 6

$$\int_0^1 x^3 \cdot e^{x^4} dx = \left| x^4 = t; d(x^4) = dt; 4x^3 dx = dt; x^3 dx = \frac{1}{4} dt; t_1 = 0^2 = 0; t_2 = 1^2 = 1 \right| =$$
$$= \frac{1}{4} \int_0^1 e^t dt = \frac{1}{4} e^t \Big|_0^1 = \frac{1}{4} e^1 - \frac{1}{4} e^0 = \frac{1}{4} e - \frac{1}{4}$$

### 3. Метод интегрирования по частям в определенном интеграле

Все выкладки темы [Интегрирование по частям в неопределенном интеграле](#) в полной мере справедливы и для определенного интеграла.

Плюсом идёт только одна деталь, в формуле интегрирования по частям добавляются пределы интегрирования:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Формулу Ньютона-Лейбница здесь необходимо применить дважды: для произведения  $uv$  и, после

того, как мы возьмем интеграл  $\int_a^b v du$ .

### Пример 7

$$\int_0^1 x \ell^{-x} dx = \left[ \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \ell^{-x} dx & v = -\ell^{-x} \end{array} \right] = -x \ell^{-x} \Big|_0^1 - \int_0^1 -\ell^{-x} dx =$$
$$= -x \ell^{-x} \Big|_0^1 - \ell^{-x} \Big|_0^1 = -2\ell^{-1} + 1$$

### Пример 8. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx.$$

**Решение.** На основании таблицы основных интегралов и формул интегрирования имеем (интегрируем по частям)

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2; \quad du = 2x dx \\ dv = \sin x dx; \quad v = -\cos x \end{array} \right| = -x^2 \cos x \Big|_0^{\pi} +$$

$$+ \int_0^{\pi} 2x \cos x dx = \pi^2 + 2 \int_0^{\pi} x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = x; \quad du = dx \\ dv = \cos x dx; \quad v = \sin x \end{array} \right| =$$

$$= \pi^2 + 2 \left( x \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx \right) = \pi^2 + 2 \cos x \Big|_0^{\pi} = \pi^2 - 2 - 2 =$$

$$= \pi^2 - 4.$$

### 3.Выполнить домашнее задание (в рабочих тетрадях):

Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^5 \frac{7 dx}{x}$$

$$\int_{-3}^1 (2x^2 + 3x - 1) dx$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\cos^2 x + 1}$$

$$\int_0^1 x^2 \cdot e^{x^3} dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x dx$$