<u>Тема:</u> Сложная функция и ее производная.

1. **Прослушайте звуковой файл https://yadi.sk/d/0Vre5Fwp4Nv5Tg .**
2. **Составить краткий конспект (записать определения, примеры).**

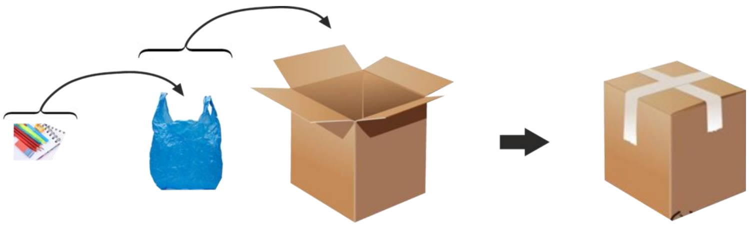
1) Понятие сложной функции.

Определение. ***Сложная функция*** - это функция от функции. Если величина y является функцией от u, то есть $y = f(u)$, а u, в свою очередь, функцией от x, то есть $u = h(x)$, то y - **сложная функция** от x, то есть $y = f(h(x))$, определённой для тех значений x, для которых значения $h(x)$ входят в множество определения функции $f(u)$.

В этом определении f - внешняя функция, h(x) – внутренняя функция или промежуточный аргумент, x – окончательный аргумент.

Понятно ли что-нибудь в этом определении? Попробуем разобраться на простом бытовом примере.

Представьте, что вы переезжаете в другую квартиру и поэтому собираете вещи в большие коробки. Пусть надо собрать какие-нибудь мелкие предметы, например, школьные письменные принадлежности. Если просто кидать их в огромную коробку, то они затеряются среди других вещей. Чтобы этого избежать, вы сначала кладете их, например, в пакет, который затем укладываете в большую коробку, после чего ее запечатываете. Этот "сложнейший" процесс представлен на схеме ниже:



Казалось бы, причем здесь математика? Да притом, что сложная функция формируется ТОЧНО ТАКИМ ЖЕ способом! Только «упаковываем» мы не тетради и ручки, а x, при этом «пакетами» и «коробками» служат разные <u>функции</u>.

Например, возьмем x и «запакуем» его в функцию <u>косинус</u>:

$$x \qquad \cos \square$$

В результате получим cosx. Это наш «пакет с вещами». А теперь кладем его в «коробку» - запаковываем, например, в кубическую функцию.

$x \quad \cos\square \qquad \square^3$

Что получится в итоге? Будет «пакет с вещами в коробке», то есть «косинус икса в кубе».

$x \quad \cos\square \qquad \square^3 \quad \Rightarrow \quad (\cos x)^3$

Получившаяся конструкция и есть сложная функция. Она отличается от простой тем, что **к одному иксу применяется НЕСКОЛЬКО «воздействий» (упаковок) подряд** и получается как бы «функция от функции» - «упаковка в упаковке».

В школьном курсе видов этих самых «упаковок» совсем мало, всего четыре :

- степенные: $\square^2, \square^3, \square^4, \square^{7,5}, \square^{-2}, \square^{-4,12}$ ...

- показательные: $2^{\square}, 5^{\square}, e^{\square}, 18^{\square}$ ...

- логарифмические: $\log_2\square, \log_7\square, \ln\square, \lg\square, \log_{4,61}\square$, ...

- тригонометрические: $\sin\square, \cos\square, \operatorname{tg}\square, \operatorname{ctg}\square$

  и обратные им: $\arcsin\square$, $\arccos\square$, $\operatorname{arctg}\square$, $\operatorname{arcctg}\square$

Теперь «упакуем» икс сначала в показательную функцию с основанием 7, а потом в тригонометрическую функцию тангенс. Получим:

$x \to 7^x \to \operatorname{tg}(7^x)$

А теперь «упакуем» икс два раза в тригонометрические функции, сначала в синус, а потом в котангенс:

$x \to \sin x \to \operatorname{ctg}(\sin x)$

Напишите теперь самостоятельно функции, где икс:
- *сначала «упаковывается» в косинус, а потом в показательную функцию с основанием* 3*;*
- *сначала в пятую степень, а затем в тангенс;*
- *сначала в логарифм по основанию* 4*, затем в степень* -2.

Ответы на это задание посмотрите в конце лекции.

А можем ли мы «упаковать» икс не два, а три раза? Да, и четыре, и пять, и двадцать пять раз. Вот, например, функция, в которой икс «упакован» 3 раза:

$y = 5\log_2(sin(x^4))$

Сначала икс «упаковали» в 4-ую степень, потом результат упаковали в синус, его в свою очередь поместили в логарифм по основанию 2, а потом всю эту «конструкцию» умножили на 5.

Рассмотрим еще несколько сложных функций:

$y = (4 - 3x)^5$
$y = 5\mathrm{tg}^3(3 - 2x)$
$y = 5\cos^4(4 - 3x)$
$y = 5^{2x}$
$y = e^{x^5}$
$y = \arcsin 6x$
$y = \arcsin\sqrt{2+3x}$
$y = \lg\sqrt{x^2+8}$
$y = 4\log_2|2-5x+3x^2|$

Еще раз уточним разницу между простой и сложной функцией. В простых функциях икс «упаковывается» один раз, а в сложных - два и более. При этом любая комбинация простых функций (то есть их сумма, разность, произведение или частное) - тоже простая функция. Например, x^7– простая функция и ctgx - тоже. Значит и все их комбинации являются простыми функциями:

x^7 + ctgx - простая, $x^7\cdot$ctgx – простая, x^7/ctgx – простая, а вот функции ctg(x^7) и ctg^7x – сложные.

Смотри схему:

это простая функция, так как несмотря на то, что упаковок две (куб и синус) - они применяются к разным иксам. То есть каждый отдельный икс упаковывается только один раз. Значит, функция простая.

это сложная функция, так как оба икса упакованы еще и в функцию показательную

$$x \to x^3 + \sin x + 2 \to 8^{x^3+\sin x+2}$$

2) Производная сложной функции.

Теорема. Производная сложной функции равна производной по промежуточному аргументу, умноженной на производную этого аргумента по независимой переменной.

То есть, если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т.е $y = f(u(x))$, то $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ - формула производной сложной функции (или $(u(v))' = u'(v)\cdot v'$).

Производная сложной функции равна произведению производной внешней функции по неизменной внутренней на производную внутренней функции.

Смотри схему разбора

Производная | сложной функции | равна | произведению

$$\left(\boxed{f(g(x))}\right)^{\boxed{\prime}} = \boxed{f'(g(x))} \boxed{\cdot} \boxed{g'(x)}$$

производной внешней функции по неизменной внутренней | на | производную внутренней функции

Проще говоря, чтобы найти производную сложной функции, нужно найти производные каждой из входящих в нее простых функций и их перемножить.

Пример 1

Найти производную функции $y = \sin(3x - 5)$

Под синусом у нас находится не просто буква «икс», а целое выражение $3x - 5$, поэтому найти производную сразу по таблице не получится. Также мы замечаем, что здесь невозможно применить первые четыре правила, вроде бы есть разность, но дело в том, что «разрывать на части» синус нельзя:

$\cancel{\sin(3x-5) = \sin(3x) - \sin 5}$

В данном примере понятно, что функция $y = \sin(3x - 5)$ – это сложная функция, причем многочлен $3x - 5$ является внутренней функцией (вложением), а $\sin(3x - 5)$ – внешней функцией.

Применим правило дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$.

Оформление решения любой производной всегда начинается так – заключаем всю функцию в скобки и ставим справа вверху штрих:

$y' = (\sin(3x - 5))'$

Сначала находим производную внешней функции $u'(v)$ (синуса), смотрим на таблицу производных элементарных функций и замечаем, что $(\sin x)' = \cos x$. В данном примере ВМЕСТО «икс» у нас $3x - 5$:

$u'(v) = \cos(3x - 5)$

Обратите внимание, что внутренняя функция $v = 3x - 5$ не изменилась, её мы не трогаем.

Ну и совершенно очевидно, что $v' = (3x - 5)'$

Результат применения формулы $(u(v))'=u'(v)\cdot v'$ в чистовом оформлении выглядит так:

$$y'=(\sin(3x-5))'=\cos(3x-5)\cdot(3x-5)'$$

Далее мы берем производную внутренней функции, она очень простая:

$$y'=(\sin(3x-5))'=\cos(3x-5)\cdot(3x-5)'=\cos(3x-5)\cdot(3-0)$$

Постоянный множитель обычно выносят в начало выражения:

$$y'=(\sin(3x-5))'=\cos(3x-5)\cdot(3x-5)'=\cos(3x-5)\cdot(3-0)=$$
$$=3\cos(3x-5)$$

<u>Пример 2</u>

Найти производную функции $y=(2x+1)^5$

Как всегда записываем:

$$y'=((2x+1)^5)'$$

Разбираемся, где у нас внешняя функция, а где внутренняя. Для этого пробуем (мысленно или на черновике) вычислить значение выражения $(2x+1)^5$ при $x=1$. Что нужно выполнить в первую очередь? В первую очередь нужно сосчитать чему равно основание: $2\cdot1+1=3$, значит, многочлен $(2x+1)$ – и есть внутренняя функция:

$$y=(\underbrace{2x+1}_{v})^5$$

И, только потом выполняется возведение в степень 3^5, следовательно, степенная функция – это внешняя функция:

$$y=\underbrace{\boxed{(\underbrace{2x+1}_{v})^5}}_{u(v)}$$

Согласно формуле $(u(v))'=u'(v)\cdot v'$, сначала нужно найти производную от внешней функции, в данном случае, от степени. Разыскиваем в таблице нужную формулу: $(x^n)'=nx^{n-1}$. Таким образом, результат применения правила дифференцирования сложной функции $(u(v))'=u'(v)\cdot v'$ следующий:

$$y'=((2x+1)^5)'=5\cdot(2x+1)^4\cdot(2x+1)'$$

Снова подчеркиваем, что когда мы берем производную от внешней функции $u'(v)$, внутренняя функция v у нас **не меняется**:

$$5\cdot(\underbrace{2x+1}_{\text{не меняется}})^4$$

Теперь осталось найти совсем простую производную от внутренней функции и немного упростить результат:

$$y' = ((2x+1)^5)' = 5\cdot(2x+1)^4\cdot(2x+1)' =$$
$$= 5\cdot(2x+1)^4\cdot(2+0) = 10\cdot(2x+1)^4$$

Пример 3

Найти производную функции y = 3sin(5x-7)

$y' = (3\sin(5x-7))' = 3\cdot\cos(5x-7)\cdot 5 = 15\cos(5x-7)$

Использованы формулы: $(\sin x)' = \cos x$; $(kx+b)' = k$

Пример 4

Найти производную функции $y = 5\cos^4(4-3x)$

$y' = (5\cos^4(4-3x))' = 5\cdot 4\cos^3(4-3x)\cdot(-\sin(4-3x))\cdot(-3) = 60\cos^3(4-3x)\cdot\sin(4-3x)$

Использованы формулы: $(x^m)' = mx^{m-1}$; $(\cos x)' = -\sin x$; $(kx+b)' = k$

Пример 5

Найти производную функции $y = 5tg^3(3-2x)$

$y' = (5tg^3(3-2x))' = 5\cdot 3tg^2(3-2x)\cdot\frac{1}{cos^2(3-2x)}\cdot(-2) = -\frac{30tg^2(3-2x)}{cos^2(3-2x)}$

Использованы формулы: $(x^m)' = mx^{m-1}$; $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; $(kx+b)' = k$

Пример 6

Найти производную функции $y = 5^{2x}$

$y' = (5^{2x})' = 5^{2x}\cdot\ln 5\cdot 2 = 2\ln 5\cdot 5^{2x}$

Использованы формулы: $(a^x)' = a^x\ln a$; $(kx+b)' = k$

Пример 7

Найти производную функции y = arcsin 6x

$$y' = (\arcsin 6x)' = \frac{1}{\sqrt{1-(6x)^2}}\cdot 6 = \frac{6}{\sqrt{1-36x^2}}$$

Использованы формулы: $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(kx+b)' = k$

Пример 8

Найти производную функции $y = \lg\sqrt{x^2+8}$

$$y' = \left(lg\sqrt{x^2+8}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+8}\cdot ln10}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+8}}\cdot 2x = \frac{x}{(x^2+8)\cdot ln10}$$

Использованы формулы: $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$; $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $(x^m)' = mx^{m-1}$

3) Повторим геометрический и физический смысл производной:

Механический смысл производной.

Мгновенная скорость прямолинейного движения материальной точки в любой момент времени t есть производная от пути s по времени t:

$$v(t) = s'(t).$$

В этом заключается *механический смысл производной*.

Ускорение прямолинейного движения материальной точки в момент времени t равно первой производной от скорости по времени или второй производной от пути по времени:

$$a(t) = s''(t)$$

Пример 9. Материальная точка движется по закону $x(t) = t^3 - 3t^2$. Найти скорость и ускорение в момент времени t=6 с. (Перемещение измеряется в метрах.)
Решение. $v(t) = s'(t) = (t^3 - 3t^2)' = 3t^2 - 6t$; $a(t) = v'(t) = (3t^2 - 6t)' = 6t - 6$.
$v(6) = 3*6^2 - 6*6 = 72$ (м/с); $a(6) = 6*6 - 6 = 30$ (м/с^2)

Пример 10. Найти момент времени t, в который ускорение точки, движущейся прямолинейно по закону $s(t) = -t^3 + 3t^2 - 8$, равно нулю. Какова при этом скорость точки?
Решение. $v(t) = s'(t) = (-t^3 + 3t^2 - 8)' = -3t^2 + 6t$; $a(t) = v'(t) = (-3t^2 + 6t)' = -6t + 6$.
По условию задачи $a(t) = 0$, т.е. $-6t + 6 = 0$, тогда t = 1 с.
$v(1) = -3\cdot 1^2 + 6\cdot 1 = 3$ м/с.

Геометрический смысл производной

Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной функции в некоторой точке есть угловой коэффициент касательной к графику функции в этой точке.

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 имеет вид: $y = f(x_0) + f^{/}(x_0)\cdot(x - x_0)$.

Прямая, проходящая через точку $M_0(x_0, f(x_0))$ перпендикулярно касательной, называется ***нормалью*** и ее уравнение имеет вид:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f^{/}(x_0)}\cdot(x - x_0).$$

<u>Пример 11.</u> Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^2 - 2x + 3$ в ее точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Решение. Находим $f(x_0) = y(2) = 2^2 - 2\cdot2 + 3 = 3$; $f^{/}(x) = 2x - 2$;

$f^{/}(x_0) = y^{/}(2) = \; = 2\cdot2 - 2 = 2$.

Подставляем найденные значения в уравнения касательной: $y = 3 + 2\cdot(x - 2)$,

$y = 2x - 1$ и нормали: $y = 3 - 1/2\cdot(x - 2)$, $y = - 1/2x + 4$ или $x + 2y - 8 = 0$.

<u>Пример 12.</u> Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = 4x - 2x^2$ в точке с абсциссой, $x_0 = 3$.

$y = f(x_0) + f^{/}(x_0)(x - x_0)$ – уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

$f(x_0) = f(3) = 4*3 - 2*3^2 = 12 - 18 = -6$; $f^{/}(x) = (4x - 2x^2)^{/} = 4*1 - 2*2x = 4 - 4x$; $f^{/}(x_0) = f^{/}(3) = 4 - 4*3 =$

$= -8$; $y = -6 + (-8)*(x - 3)$; $y = -6 - 8x + 24$; $y = 18 - 8x$

(Ответы: 3^{cosx} *;* $tg(x^5)$*;* $(log_4 x)^{-2}$*)*

3. Выполнить практическую работу

ВАРИАНТ 1

1. Найти производные следующих функций:

а) $y = 3tg^3(4x-5)$ б) $y = e^{x^6}$ в) $y = arctg\ 5x$

2. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{3}{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$,.
3. Материальная точка движется по закону $x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 5t$. Найти скорость и ускорение в момент времени t=5 с. (Перемещение измеряется в метрах.)

ВАРИАНТ 2

1. Найти производные следующих функций:

а) $y = 3\ tg^4\ (5x - 2)$ б) $y = 2^{5x}$ в) $y = \arcsin 4x$

2. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2x - x^2$ в точке с абсциссой, $x_0 = 2$.
3. Материальная точка движется по закону $x(t) = t^3 - 4t^2$. Найти скорость и ускорение в момент времени t=5 с. (Перемещение измеряется в метрах.)

ВАРИАНТ 3

1. Найти производные следующих функций:

а) $y = 9\sin^3(3x - \frac{\pi}{8})$ б) $y = e^{x^3}$ в) $y = 4\arcsin\sqrt{1+x^2}$

2. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 + 1$ в точке с абсциссой, $x_0 = 1$.
3. Материальная точка движется по закону $x(t) = \frac{1}{4}t^4 + t^2$. Найти скорость и ускорение в момент времени t=5 с. (Перемещение измеряется в метрах.)

ВАРИАНТ 4

1. Найти производные следующих функций:

а) $y = 12\cos^2\left(6x - \frac{\pi}{3}\right)$ б) $y = e^{x^5}$ в) $y = 3\arcsin\sqrt{1-x^2}$

2. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3 - 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.
3. Материальная точка движется по закону $x(t) = t^4 - 2t$. Найти скорость и ускорение в момент времени t=5 с. (Перемещение измеряется в метрах.)

ВАРИАНТ 5

1. Найти производные следующих функций:

а) $y = 12\cos^2\left(6x - \frac{\pi}{3}\right)$ б) $y = e^{x^4}$ в) $y = 3\arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right)$

д) $y = 2\lg\left|8x^2 - 3x + 1\right|$

2. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = tgx$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{4}$,.

3.Материальная точка движется по закону $x(t) = 2t^3 - 8$. Найти скорость и ускорение в момент времени t=5 с. (Перемещение измеряется в метрах.)

ВАРИАНТ 6

1. Найти производные следующих функций:

а) y = 4 sin^5 (5-6x) б) $y = e^{x^6}$

в) $y = \arcsin\sqrt{1+x^2}$ г) $y = 5\log_2\left|4x^2 - 5x + 2\right|$

2. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = 1 + \cos x$ в точке с абсциссой, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.
3. Материальная точка движется по закону $x(t) = t^4 + 2t$. Найти скорость и ускорение в момент времени t=5 с. (Перемещение измеряется в метрах.)

1 вариант	Баганов К., Бублик В, Киселев А.
2 вариант	Козлов М., Мехоношина В., Молодцова А.
3 вариант	Силантьев К., Фатуллаев Р., Федотов Н.
4 вариант	Филиппова К., Щекоткин Д., Крайнов А.
5 вариант	Ипполитов Е., Князев А., Мухин М., Нестеров А.
6 вариант	Осипов А., Царев Н., Тюленев Д., Штанько А.

Все практические работы выполнять на отдельных листках (оформлять аккуратно, разборчивым почерком) сфотографировать и отправить на электронную почту: olga.georg.gor@yandex.ru