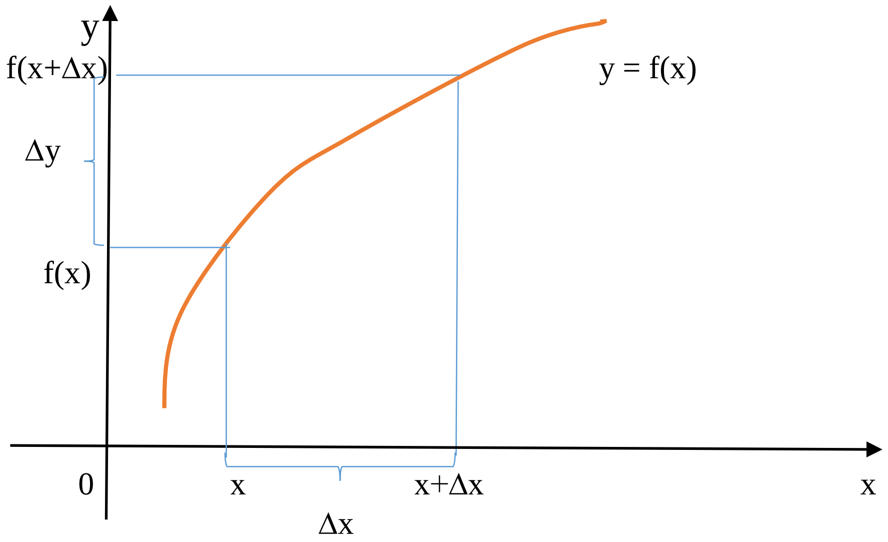
<u>Тема:</u> Производная функции.

(Тема «Производная функции» изучалась на первом курсе, поэтому теория изложена предельно кратко, повторите её самостоятельно)

1. **Посмотрите презентацию «Производная функции» https://yadi.sk/i/JRO5jVip6QVVWg**
2. **Повторить теорию. Составить краткий конспект (записать определения, примеры, выполнить чертежи).**

Пусть функция $f(x)$ определена в точке ***x*** и в некоторой окрестности этой точки. При каждом значении аргумента ***x*** из этого промежутка функция $f(x)$ имеет определенное значение.

Пусть аргумент ***x*** получил некоторое (положительное или отрицательное) приращение Δ**x**, тогда функция $y = f(x)$ получит некоторое приращение Δ**y**. Таким образом, при значении аргумента **x** будем иметь $y = f(x)$, при значении аргумента $x + \Delta x$ будем иметь $y(x) + \Delta y = f(x + \Delta x)$, отсюда получим $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$. Если существует предел отношения приращения функции Δ**y** к приращению аргумента Δ**x** при $\Delta x \to 0$, то говорят, что функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке **x**, а этот предел называют значением производной функции $y = f(x)$ в точке **x** и обозначают y'



Определение. Производной данной функции $y = f(x)$ **по аргументу x называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда последнее произвольным образом стремится к нулю.**

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \text{или} \qquad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Наряду с обозначением $f'(x)$ и y' для производной употребляются и другие обозначения y'_x и $\frac{dy}{dx}$.

Конкретное значение производной при $x = a$ обозначается $f'(a)$.

Операция нахождения производной от функции $f(x)$ называется **дифференцированием** этой функции.

Механический смысл производной.

Мгновенная скорость прямолинейного движения материальной точки в любой момент времени t есть производная от пути s по времени t:

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}.$$

В этом заключается *механический смысл производной*.

Ускорение прямолинейного движения материальной точки в момент времени t равно первой производной от скорости по времени или второй производной от пути по времени:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Геометрический смысл производной

***Геометрический смысл производной* состоит в том, что значение производной функции в некоторой точке есть угловой коэффициент касательной к графику функции в этой точке.**

***Уравнение касательной* к графику функции y = f(x) в точке с абсциссой x_0 имеет вид: $y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$.**

Прямая, проходящая через точку $M_0(x_0, f(x_0))$ перпендикулярно касательной, называется *нормалью* и ее уравнение имеет вид:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0).$$

Основные правила дифференцирования.

Пусть **C**- постоянная, U=u(x),V=v(x) - функции, имеющие производные.

1. Производная постоянной равна нулю, т.е. $C' = 0$
2. Постоянный множитель можно выносить за знак производной, т.е. $(Cu)' = Cu'$.

3. Производная суммы (разности) конечного числа дифференцируемых функций равна соответствующей сумме (разности) производных этих функций, т.е. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
4. Производная произведения находится в виде: $(uv)' = u'v + uv'$.
5. Производная частного находится по формуле : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Формулы дифференцирования основных функций

1. $(x^m)' = mx^{m-1}$
2. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
3. $(\ell^x)' = \ell^x$
4. $(a^x)' = a^x \ln a \cdot x'$
5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
6. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
10. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
13. $(arctgx)' = \frac{1}{1 + x^2}$
14. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1 + x^2}$

Нахождение производных.

ПРИМЕР 1 $y = 5x$; $y' = 5 \cdot x' = 5$ (т.к. $x' = 1$)

ПРИМЕР 2 $y = x^3$; $y' = 3x^{3-1} = 3x^2$

ПРИМЕР 3 $y = 4x^3 - 2x^2 + x - 5$; $y' = 4 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 1 = 12x^2 - 4x + 1$

ПРИМЕР 4 $y = 11x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x + \sqrt{3}$;

$y' = 11 \cdot 4 \cdot x^3 + 2 \cdot 3x^2 - 4 \cdot 2x - 5 \cdot 1 + 0 = 44x^3 + 6x^2 - 8x - 5$

ПРИМЕР 5 $y = (x^3 - 1)(x^2 + x + 1)$.

Пусть $u = x^3 - 1$ $v = x^2 + x + 1$.Тогда по формуле производной произведения, получим: $y' = (x^3 - 1)'(x^2 + x + 1) + (x^3 - 1)(x^2 + x + 1)'$

$y' = 3x^2(x^2 + x + 1) + (x^3 - 1)(2x + 1) = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 1$

ПРИМЕР 6 $y = 3x^7 \cdot \cos x$

$y' = (3x^7)' \cdot \cos x + 3x^7 \cdot \cos' x = 21x^6 \cdot \cos x - 3x^7 \cdot \sin x$

ПРИМЕР 7 $y = 5x^4 \cdot tgx$

$y' = (5x^4)' \cdot tgx + 5x^4 \cdot tg^{-}x = 5 \cdot 4x^3 \cdot tgx + 5x^4 \cdot \frac{1}{cos^2 x} = 20x^3 \cdot tgx + \frac{5x^4}{cos^2 x}$

ПРИМЕР 8 $y = 5x \cdot 4^x$

$$y^{/} = (5x)^{/} \cdot 4^x + 5x \cdot (4^x)^{-} = 5 \cdot 4^x + 5x \cdot \frac{4^x}{ln4}$$

ПРИМЕР 9 $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$. Воспользуемся формулой производной частного:

$$y' = \frac{(x^2+1)'(x^2-1)-(x^2+1)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}$$

$$y' = \frac{2x(x^2-1)-(x^2+1)2x}{(x^2-1)^2} = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}$$

ПРИМЕР 10 $y = \frac{\sin x}{x^6}$

$$y' = \frac{(\sin x)'x^6 - \sin x \cdot (x^6)'}{(x^6)^2} = \frac{\cos x \cdot x^6 - \sin x \cdot 6x^5}{x^{12}} = \frac{x^5 \cdot (x \cdot \cos x - 6\sin x)}{x^{12}} = \frac{x \cdot \cos x - 6\sin x}{x^7}$$

3. Выполнить практическую работу (по вариантам):

ВАРИАНТ 1

1. Найти производные следующих функций:

а) $y = 12x^6 - 5x^4 + 3x^3 + 6x^2 - 12x - 3$, б) $y = x \cdot 3^x$ в) $y = \frac{\cos x}{x^4}$

ВАРИАНТ 2

1. Найти производные следующих функций:

а) $y = 3x^7 - 2x^5 + 8x^3 + 2x^2 - 11x + 3$ б) $y = 3x \cdot 5^x$ в) $y = \frac{\cos x}{x^2}$

ВАРИАНТ 3

1. Найти производные следующих функций:

а) $y = 9x^4 - 8x^3 + 2x^2 + 13x - 8{,}3$ б) $y = 5x^6 \cdot tgx$ в) $y = \frac{\cos x}{x^6}$

ВАРИАНТ 4

1. Найти производные следующих функций:

а) $y = 7x^5 - 12x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 9x - 9$ б) $y = 3x^7 \cdot \cos x$ в) $y = \dfrac{\sin x}{x^3}$

ВАРИАНТ 5

1. Найти производные следующих функций:

а) $y = 7x^5 - 12x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 9x - 11$ б) $y = 3x^7 \cdot \cos x$ в) $y = \dfrac{\sin x}{x^3}$

ВАРИАНТ 6

1. Найти производные следующих функций:

а) $y = 12x^3 + 4x^2 - 9x + 12{,}3$ б) $y = 4x^3 \cdot \mathrm{ctg}x$ в) $y = \dfrac{\cos x}{x^4}$

1 вариант	Баганов К., Бублик В, Киселев А.
2 вариант	Козлов М., Мехоношина В., Молодцова А.
3 вариант	Силантьев К., Фатуллаев Р., Федотов Н.
4 вариант	Филиппова К., Щекоткин Д., Крайнов А.
5 вариант	Ипполитов Е., Князев А., Мухин М., Нестеров А.
6 вариант	Осипов А., Царев Н., Тюленев Д., Штанько А.

Все практические работы выполнять на отдельных листках (оформлять аккуратно, разборчивым почерком) сфотографировать и отправить на электронную почту: olga.georg.gor@yandex.ru