https://yadi.sk/d/ubU5vyZgzJKZOQ

<u>Тема:</u> Предмет и задачи математической статистики. Случайные величины и их характеристики.

1. ***Изучить теоретический материал, составить конспект (записать определения, формулы, примеры).***

1) **Математическая статистика** является логическим продолжением **теории вероятностей**. Отличие состоит в том, что теория вероятностей даёт теоретическую оценку случайным событиям, а статистика работает с практическими, или как говорят, ***эмпирическими*** данными, которые берутся непосредственно «из жизни».

Что такое математическая статистика? Математическая статистика изучает методы сбора и обработки *статистической информации* для получения научных и практических выводов. Статистическая – это та, которую можно выразить числами. Эта информация появляется в результате исследования массовых явлений, которые носят случайный характер.

Для изучения темы желательно знать **азы теории вероятности**, в частности, **случайные величины** – многие понятия и формулы будут очень и очень схожи.

Случайной величиной называется переменная X, которая в результате испытания может принять одно и только одно значение, не известное заранее и зависящее от исхода испытания.

Случайные величины, как правило, **обозначают** через X, Y, Z *****, а их значения – соответствующими маленькими буквами с подстрочными индексами, например, x_1, x_2, x_3 .

***<u>Пример</u>* 1.** При бросании игральной кости случайной является величина X – число очков, которое выпадет на верхней грани. Возможными значениями величины X служат числа 1, 2, 3, 4, 5, 6.

***<u>Пример</u>* 2.** Число родившихся мальчиков среди ста новорожденных есть случайная величина X, возможными значениями которой являются числа 0, 1, 2, 3, ,.. .,., 100.

Величина X называется ***дискретной случайной величиной***, если множество ее возможных значений представляет собой конечную или бесконечную последовательность чисел $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ и если каждое соотношение $X = x_i$ (i = 1, 2, ...) является элементарным случайным событием и имеет определенную вероятность $p_i = \mathbf{P}(X = x_i)$.

Мы будем рассматривать дискретные случайные величины лишь с конечными множествами значений.

Законом распределения дискретной случайной величины X называется соответствие между возможными значениями x_i и их вероятностями p_i.

Закон распределения (как и всякую функцию) можно задать таблично, аналитически и графически. Если случайная величина X может принимать лишь конечное число различных значений $x_1, x_2, ..., x_n$, то элементарные события $X = x_1, X = x_2, ..., X = x_n$ образуют полную группу и поэтому сумма их вероятностей равна единице, т. е.

$p_1 + p_2 + ...+ p_n = 1.$

Закон распределения такой величины может быть представлен в виде таблицы:

x_i	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

***Пример* 3.**

Вот, например, как выглядит таблица распределения вероятностей дискретной случайной величины X – числа очков, выпадающего при бросании правильной игральной кости:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Здесь x_i – число очков на верхней грани игральной кости, p_i – вероятность выпадения этого числа очков.

Пример 4

В коробке находятся 50 лотерейных билетов, среди которых 12 выигрышных, причём 2 из них выигрывают по 1000 рублей, а остальные – по 100 рублей. Составить закон распределения случайной величины V – размера выигрыша, если из коробки наугад извлекается один билет.

Решение: Значения случайной величины принято располагать в порядке их возрастания. Поэтому мы начинаем с самого маленького выигрыша, и именно $v_1 = 0$ рублей.

Всего таковых билетов 50 – 12 = 38, и по **классическому определению**: $p_1 = \frac{38}{50} = 0{,}76$ – вероятность того, что наудачу извлечённый билет окажется безвыигрышным.

С остальными случаями всё просто. Вероятность выигрыша $v_2 = 100$ рублей составляет: $p_2 = \frac{10}{50} = 0{,}2$

И для $v_3 = 1000$: $p_3 = \frac{2}{50} = 0{,}04$

Проверка: $p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}76 + 0{,}2 + 0{,}04 = 1$

Ответ: искомый закон распределения выигрыша:

V	0	100	1000
	0,76	0,2	0,04

2)Закон распределения полностью описывает случайную величину, однако на практике бывает полезно знать лишь некоторые её ***числовые характеристики***.

Математическое ожидание дискретной случайной величины

Математическим ожиданием M(X) дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее возможных значений x_i на их вероятности p_i:

M(X) = $x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_n p_n$.

Говоря простым языком, это *среднеожидаемое значение* при многократном повторении испытаний. Пусть случайная величина X принимает значения $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ соответственно. Тогда математическое ожидание $M(X)$ данной случайной величины равно *сумме произведений* всех её значений на соответствующие вероятности:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \ldots + x_np_n$$

или в свёрнутом виде:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i$$

Вычислим, например, математическое ожидание случайной величины X – количества выпавших на игральном кубике очков:

$$M(X) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5$$ очка

В чём состоит вероятностный смысл полученного результата? Если подбросить кубик достаточно много раз, то *среднее значение* выпавших очков будет близкО к 3,5 – и чем больше провести испытаний, тем ближе.

***Пример* 5.**

Некоторая игра имеет следующий закон распределения выигрыша:

u_i	-5	2,5	10
p_i	0,5	0,4	0,1

Возникает вопрос: а выгодно ли вообще играть в эту игру? На этот вопрос можно легко ответить, вычислив математическое ожидание, по сути – *средневзвешенный* по вероятностям выигрыш:

$M(U) = u_1p_1 + u_2p_2 + u_3p_3 = -5\cdot 0{,}5 + 2{,}5\cdot 0{,}4 + 10\cdot 0{,}1 = -2{,}5 + 1 + 1 = -0{,}5$, таким образом, математическое ожидание данной игры **проигрышно**.

***Пример* 6.** Найти математическое ожидание случайной величины *X*, зная закон ее распределения:

x_i	- 1	0	1	2	3
p_i	0,2	0,1	0,25	0,15	0,3

M(X) = –1·0,2 + 0·0,1 + 1·0,25 + 2·0,15 + 3·0,3= 1,25.

Пример 7.

Некоторый человек играет в европейскую рулетку по следующей системе: постоянно ставит 100 рублей на «красное». Составить закон распределения случайной величины X – его выигрыша. Вычислить математическое ожидание выигрыша и округлить его до копеек. Сколько *в среднем* проигрывает игрок с каждой поставленной сотни?

***Справка**: европейская рулетка содержит 18 красных, 18 чёрных и 1 зелёный сектор («зеро»). В случае выпадения «красного» игроку выплачивается удвоенная ставка, в противном случае она уходит в доход казино.*

Решение: игрок выигрывает 100 рублей в 18 случаях из 37, и поэтому закон распределения его выигрыша имеет следующий вид:

X	-100	100
	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$

Вычислим математическое ожидание:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 = -100 \cdot \frac{19}{37} + 100 \cdot \frac{18}{37} = -\frac{1900}{37} + \frac{1800}{37} = -\frac{100}{37} \approx -2{,}70$$

Таким образом, с каждой поставленной сотни игрок в среднем проигрывает 2,7 рубля.

Математическое ожидание обладает следующими свойствами.

а) Математическое ожидание постоянной величины *C* равно самой постоянной:

$\mathbf{M}(C) = C$.

б) Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$\mathbf{M}(X+Y) = \mathbf{M}(X) + \mathbf{M}(Y).$$

в) Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин:

$$\mathbf{M}(X \cdot Y) = \mathbf{M}(X) \cdot \mathbf{M}(Y).$$

г) Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$\mathbf{M}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{X}) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{M}(\mathbf{X})$$

Итак, мы выяснили, насколько полезно знать **математическое ожидание**, однако только этой характеристики ещё не достаточно для исследования случайной величины. Представим двух стрелков, которые стреляют по мишени. Один стреляет метко и попадает близко к центру, а другой… просто развлекается и даже не целится. Но что забавно, его *средний* результат будет точно таким же, как и у первого стрелка! Эту ситуацию условно иллюстрируют следующие случайные величины:

X	-1	1
	$0{,}5$	$0{,}5$

Y	-100	100
	$0{,}5$	$0{,}5$

«Снайперское» математическое ожидание равно $M(X) = -1 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}5 = 0$, однако и у второго стрелка: $M(Y) = -100 \cdot 0{,}5 + 100 \cdot 0{,}5 = 0$ – оно тоже нулевое!

Таким образом, возникает потребность количественно оценить, насколько далеко *рассеяны* пули (значения случайной величины) относительно центра мишени (математического ожидания). Ну а *рассеяние* с латыни переводится как ***дисперсия***.

Основной числовой характеристикой рассеяния возможных значений случайной величины *X* служит дисперсия D(*X*), которая определяется по формуле

$$\mathbf{D}(X) = \mathbf{M}(X - \mathbf{M}(X))^2.$$

Формулу для дисперсии можно привести к следующему виду, более удобному для вычислений:

$$\mathbf{D}(X) = \mathbf{M}(X^2) - \mathbf{M}^2(X).$$

Величина $\sigma = \sqrt{\mathbf{D}(X)}$ называется средним квадратическим отклонением случайной величины X.

__Пример 4.__ Дискретная случайная величина распределена по закону:

x_i	- 1	0	1	2
p_i	0,2	0,1	0,3	0,4

Найти $\mathbf{D}(X)$.

Решение. Сначала находим

$\mathbf{M}(X) = -1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}4 = 0{,}9$,

а затем

$\mathbf{M}(X^2) = (-1)^2 \cdot 0{,}2 + 0^2 \cdot 0{,}1 + 1^2 \cdot 0{,}3 + 2^2 \cdot 0{,}4 = 2{,}1$.

По последней формуле находим:

$$\mathbf{D}(X) = \mathbf{M}\left(X^2\right) - \mathbf{M}^2(X) = 2{,}1 - 0{,}81 = 1{,}29.$$

Итак, основная особенность случайной величины состоит в том, что нельзя заранее предвидеть, какое из возможных значений она примет в результате испытания. Однако при достаточно большом числе испытаний суммарное поведение случайных величин почти утрачивает случайный характер и становится закономерным. Весьма важным при этом является знание условий возникновения закономерностей случайной величины. Эти условия составляют содержание ряда теорем, получивших общее название закона больших чисел. Впервые этот закон (в простейшей его форме) был сформулирован Бернулли в виде теоремы, устанавливающей связь между вероятностью случайного события и его относительной частотой.

Относительной частотой $W(A)$ случайного события A называют отношение числа m испытаний, в результате которых событие произошло, к общему числу n проведенных испытаний:

$$W(A) = \frac{m}{n}.$$

Оказывается, что при многократном повторении испытания относительная частота случайного события принимает значения, близкие к вероятности того, что оно произошло в результате одного испытания. Например, знаменитый статистик К. Пирсон бросил монету 24000 раз и получил при этом 12012 гербов, что дает относительную частоту, очень близкую к вероятности, равной 1/2, появления герба в одном испытании.

Теорема Бернулли. С вероятностью, сколь угодно близкой к единице, можно утверждать, что при достаточно большом числе независимых испытаний относительная частота случайного события как угодно мало отличается от его вероятности при отдельном испытании.

Наиболее общим законом больших чисел является теорема П. Л. Чебышева, которая утверждает, что среднее арифметическое достаточно большого числа независимых случайных величин с равномерно ограниченными (не превышающими постоянного числа C) дисперсиями утрачивает характер случайной величины.

2.Ответить на контрольные вопросы (устно):

1. Дайте определение дискретной случайной величины.
2. Что называется законом распределения дискретной случайной величины?
3. Какой смысл имеет математическое ожидание дискретной случайной величины?
4. Как рассчитывается дисперсия дискретной случайной величины?
5. Что такое относительная частота случайного события?

3.Выполнить практическую работу (по вариантам):

Варианты 1,4

1. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, зная закон ее распределения:

X	0,2	0,4	0,6	0,8	1
p	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Варианты 2,5

1. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, зная закон ее распределения:

X	3	4	5	6	7
p	0,2	0,15	0,05	0,25	0,35

Варианты 3,6

1. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, зная закон ее распределения:

X	-1	0	1	2	3
p	0,2	0,1	0,15	0,4	0,15

1 вариант	Александрова Е., Зямилева М., Кузнецова А.
2 вариант	Архипов П., Копытин А., Кириллова Е.
3 вариант	Бахаев А., Шабрацкий А., Лавров И.
4 вариант	Грачева В., Минеева А., Светилов А.
5 вариант	Рагрин С., Салтыков., Байко А.
6 вариант	Андрианычев А., Саввич Д., Скрыков С., Кукушкина А.

Все практические работы выполнить на отдельных листках (оформлять аккуратно, разборчивым почерком) сфотографировать и отправить на электронную почту: **olga.georg.gor@yandex.ru**