https://yadi.sk/d/WyO5L82bYlb2kA

Тема: Предмет теории вероятностей. Понятие о событии, виды событий, действия с событиями.

1. ***Изучить теоретический материал, составить конспект (записать определения, формулы, примеры).***

Что изучает теория вероятностей? Многим в голову наверняка пришли мысли вроде «вероятность дождя велика», «вероятность выигрыша в лотерею мала», «орёл и решка выпадают с вероятностью 50 на 50» и т.п. Но тогда сразу возникает вопрос, при чём здесь наука? И действительно, обывательское понимание вероятности больше смахивает на некое предсказание, часто с изрядной долей мистицизма и суеверий.

Теория вероятностей изучает *вероятностные закономерности* массовых однородных *случайных событий*. То есть, у неё нет цели что-либо угадать, например, результат броска той же монеты в единичном эксперименте. Однако если одну и ту же монету в одинаковых условиях подбрасывать сотни и тысячи раз, то будет прослеживаться чёткая закономерность, описываемая вполне жёсткими законами.

Или пример попроще. Если вы приобретёте лотерейный билет, то вряд ли что-то выиграете и совсем невероятно, что сорвёте крупный куш. Но организатор лотереи даже при случайном розыгрыше тиража *(извлечение пронумерованных шариков и т.п. либо если участники сами угадывают номера)* **гарантированно и с высокой точностью знает**, сколько билетов выиграют/проиграют, и, понятно, остаётся в прибыли. Лотереи часто называют обманом, однако парадокс состоит в том, что **эта гарантия строго обоснована теорией**; рАвно, как и житейская фраза «всё равно ничего не выиграю». Думаю, теперь все поняли правильный способ заработка на лотереях.

Сначала разбираемся с основными терминами.

События. Виды событий

Одно из базовых понятий уже озвучено выше – это ***событие***. События бывают ***достоверными***, ***невозможными*** и ***случайными***.

Достоверным называют событие, которое в результате ***испытания*** *(осуществления определенных действий, определённого комплекса условий)* **обязательно произойдёт**. Например, в условиях земного тяготения подброшенная монета непременно упадёт вниз.

Невозможным называют событие, которое **заведомо не произойдёт** в результате испытания. Пример невозможного события: в условиях земного тяготения подброшенная монета улетит вверх.

И, наконец, событие называется **случайным**, если в результате испытания оно может, **как произойти, так и не произойти**, при этом должен иметь место принципиальный критерий случайности: случайное событие – есть следствие случайных факторов, воздействие которых предугадать невозможно или крайне затруднительно. Пример: в результате броска монеты выпадет «орёл». В рассмотренном случае случайные факторы – это форма и физические характеристики монеты, сила/направление броска, сопротивление воздуха и т.д.

Любой результат испытания называется ***исходом***, который, собственно и представляет собой появление определённого события. В частности, при подбрасывании монеты возможно 2 исхода (случайных события): выпадет орёл, выпадет решка. Естественно, подразумевается, что данное испытание проводится в таких условиях, что монета не может встать на ребро или, скажем, зависнуть в невесомости.

События (любые) **обозначают** большими латинскими буквами $A, B, C, D, E, F, \dots$ либо теми же буквами с подстрочными индексами, например: $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots$. Исключение составляет буква P, которая зарезервирована под другие нужды.

Запишем следующие случайные события:

$A_О$ – в результате броска монеты выпадет «орёл»;

B_5 – в результате броска игральной кости (кубика) выпадет 5 очков;

$C_Т$ – из колоды будет извлечена карта трефовой масти *(по умолчанию колода считается полной)*.

Да, события прямо так и записывают в практических задачах, при этом в уместных случаях удобно использовать «говорящие» подстрочные индексы (хотя можно обойтись и без них).

Случайные события обязательно удовлетворяют вышеприведённому критерию случайности. В этом смысле снова показателен 3-й пример: если из колоды изначально удалить все карты трефовой масти, то событие $C_Т$ становится *невозможным*. Наоборот, если испытателю известно, что, например, дама треф лежит снизу, то он при желании может сделать событие $C_Т$ *достоверным* =) Таким образом, в данном примере предполагается, что **карты хорошо перемешаны и их рубашки неразличимы**, т.е. колода не является краплёной. Причём, здесь под «крапом» понимаются даже не «умелые руки», ликвидирующие случайность вашего выигрыша, а видимые дефекты карт. Например, рубашка той же дамы треф может быть грязной, порванной, заклеенной скотчем…

Другая важная характеристика событий – это их ***равновозможность***. Два или бОльшее количество событий называют **равновозможными**, если ни одно из них не является более возможным, чем другие. Например:

выпадение орла или решки при броске монеты;
выпадение 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков при броске игрального кубика;
извлечение карты трефовой, пиковой, бубновой или червовой масти из колоды.

При этом предполагается, что монета и кубик однородны и имеют геометрически правильную форму, а колода хорошо перемешана и «идеальна» с точки зрения неразличимости рубашек карт.

Могут ли быть те же события **не равновозможными**? Могут! Например, если у монеты или кубика смещён центр тяжести, то гораздо чаще будут выпадать вполне определённые грани. Как говорится, ещё одна лазейка для мошенников. События $C_Т, C_П, C_Ч, C_Б$ – извлечение трефы, пики, червы или бубны тоже равновозможны. Однако равновозможность легко нарушит фокусник, который, тасуя колоду (даже «идеальную»), ловко подсмотрит и спрячет в рукаве, например, туза треф. Здесь становится *менее возможным*, что оппоненту будет сдана трефа, и, главное, *менее возможно*, что будет сдан туз.

Тем не менее, в рассмотренных трёх случаях при потере равновозможности всё же сохраняется случайность событий.

<u>Совместные и несовместные события. Противоположные события. Полная группа событий</u>

События называют ***несовместными***, если <u>в одном и том же испытании</u> появление одного из событий **исключает** появление других событий. Простейшим примером несовместных событий является пара ***противоположных*** событий. Событие, противоположное данному, обычно обозначается той же латинской буквой с чёрточкой вверху. Например:

A_o – в результате броска монеты выпадет орёл;

$\overline{A}_o$ – в результате броска монеты выпадет решка.

Совершено ясно, что в отдельно взятом испытании появление орла исключает появление решки (и наоборот), поэтому данные события и называются несовместными.

Противоположные события легко формулируются из соображений элементарной логики:

B_5 – в результате броска игрального кубика выпадет 5 очков;

$\overline{B}_5$ – в результате броска игрального кубика выпадет число очков, отличное от пяти.

Либо пять, либо не пять – третьего не дано, т.е. события **несовместны** и **противоположны**.

Аналогично – или трефа или карта другой масти:

C_T – из колоды будет извлечена карта трефовой масти;

$\overline{C}_T$ – из колоды будет извлечена пика, черва или бубна.

Множество несовместных событий образуют ***полную группу событий***, если в результате отдельно взятого испытания **обязательно появится одно из этих событий**. Очевидно, что любая пара противоположных событий (в частности, примеры выше) образует полную группу. Однако в различных задачах с одним и тем же объектом могут фигурировать разные события, например, для игрального кубика характерно рассмотрение следующего набора:

B_1 – в результате броска игрального кубика выпадет 1 очко;

B_2 – … 2 очка;

B_3 – … 3 очка;

B_4 – … 4 очка;

B_5 – … 5 очков;

B_6 – … 6 очков.

События $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ **несовместны** *(поскольку появление какой-либо грани исключает одновременное появление других)* **и образуют полную группу** *(так как в результате испытания непременно появится одно из этих шести событий)*.

Ещё одно важное понятие, которое нам скоро потребуется – это ***элементарность*** исхода (события). Если совсем просто, то элементарное событие «нельзя разложить на другие события». Например, события $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ элементарны, но событие $\overline{B}_5$ не является таковым, так как подразумевает выпадение 1, 2, 3, 4 или 6 очков (включает в себя 5 элементарных исходов).

В примере с картами события $C_T, C_П, C_Ч, C_Б$ (извлечение трефы, пики, червы или бубны соответственно) несовместны и образуют полную группу, но они неэлементарны. Если считать, что в колоде 36 карт, то каждое из перечисленных событий включает в себя 9 элементарных исходов.

Аналогично – события $D_6, D_7, D_8, D_9, D_{10}, D_В, D_Д, D_К, D_Т$ (извлечение шестёрки, семёрки, …, короля, туза) несовместны, образуют полную группу и неэлементарны (каждое включает в себя 4 исхода).

Таким образом, элементарным исходом здесь считается лишь извлечение какой-то конкретной карты, и, разумеется, 36 несовместных элементарных исходов тоже образуют полную группу событий.

Совместные события менее значимы с точки зрения решения практических задач, но обходить их стороной не будем. События называются **совместными**, если в отдельно взятом испытании появление одного из них **не исключает** появление другого. Например:

C_T – из колоды карт будет извлечена трефа;

D_7 – из колоды карт будет извлечена семёрка.

Если быть совсем лаконичным, одно не исключает другого.

Понятие совместности охватывает и бОльшее количество событий:

D – завтра в 12.00 будет дождь;
G – завтра в 12.00 будет гроза;
S – завтра в 12.00 будет солнце.

Ситуация, конечно, довольно редкая, но совместное появление всех трёх событий в принципе не исключено. Следует отметить, что перечисленные события совместны и попарно, т.е. может быть только ливень с грозой или грибной дождик, или погромыхает неподалёку на фоне ясного неба.

Алгебра событий

Пожалуйста, запомните **ВАЖНЕЙШЕЕ ПРАВИЛО**:

Операция сложения событий означает **логическую связку ИЛИ**,
а **операция умножения событий** – **логическую связку И**.

1) **Суммой** двух событий A и B называется событие $A+B$ которое состоит в том, что наступит **или** событие A **или** событие B **или** оба события одновременно. В том случае, если события **несовместны**, последний вариант отпадает, то есть может наступить **или** событие A **или** событие B.

Правило распространяется и на бОльшее количество слагаемых, например, событие $A_1+A_2+A_3+A_4+A_5$ состоит в том, что произойдёт **хотя бы одно** из событий A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, а **если события несовместны** – **то одно и только одно** событие из этой суммы: **или** событие A_1, **или** событие A_2, **или** событие A_3, **или** событие A_4, **или** событие A_5.

Примеров масса:

События $\overline{B}_5 = B_1+B_2+B_3+B_4+B_6$ (при броске игральной кости не выпадет 5 очков) состоит в том, что выпадет **или** 1, **или** 2, **или** 3, **или** 4, **или** 6 очков.

Событие $B_{1,2} = B_1+B_2$ (выпадет **не более** двух очков) состоит в том, что появится 1 **или** 2 **очка**.

Событие $B_Ч = B_2+B_4+B_6$ (будет чётное число очков) состоит в том, что выпадет **или** 2 **или** 4 **или** 6 очков.

Событие $C_Ч+C_Б$ заключается в том, что из колоды будет извлечена карта красной масти (черва **или** бубна), а событие $D_В+D_Д+D_К+D_Т$ – в том, что будет извлечена «картинка» (валет **или** дама **или** король **или** туз).

Чуть занятнее дело с совместными событиями:

Событие C_T+D_7 состоит в том, что из колоды будет извлечена трефа **или** семёрка **или** семёрка треф. Согласно данному выше определению, **хотя бы что-то** – или любая трефа или любая семёрка или их «пересечение» – семёрка треф. Легко подсчитать, что данному событию соответствует 12 элементарных исходов (9 трефовых карт + 3 оставшиеся семёрки).

Событие $D+G+S$ состоит в том, что завтра в 12.00 наступит **ХОТЯ БЫ ОДНО из суммируемых совместных событий**, а именно:

– или будет только дождь / только гроза / только солнце;
– или наступит только какая-нибудь пара событий (дождь + гроза / дождь + солнце / гроза + солнце);
– или все три события появятся одновременно.

То есть, событие $D+G+S$ включает в себя 7 возможных исходов.

2) **Произведением** двух событий A и B называют событие AB, которое состоит в совместном появлении этих событий, иными словами, умножение AB означает, что при некоторых обстоятельствах наступит **и** событие A, **и** событие B. Аналогичное утверждение справедливо и для бОльшего количества событий, так, например, произведение $A_1A_2A_3 \cdot \ldots \cdot A_{10}$ подразумевает, что при определённых условиях произойдёт **и** событие A_1, **и** событие A_2, **и** событие A_3, …, **и** событие A_{10}.

Рассмотрим испытание, в котором подбрасываются две монеты и следующие события:

A_1 – на 1-й монете выпадет орёл;
$\overline{A}_1$ – на 1-й монете выпадет решка;
A_2 – на 2-й монете выпадет орёл;
$\overline{A}_2$ – на 2-й монете выпадет решка.

Тогда:
– событие A_1A_2 состоит в том, что на обеих монетах (на 1-й **и** на 2-й) выпадет орёл;
– событие $\overline{A}_1\overline{A}_2$ состоит в том, что на обеих монетах (на 1-й **и** на 2-й) выпадет решка;
– событие $A_1\overline{A}_2$ состоит в том, что на 1-й монете выпадет орёл **и** на 2-й монете решка;
– событие $\overline{A}_1A_2$ состоит в том, что на 1-й монете выпадет решка **и** на 2-й монете орёл.

Нетрудно заметить, что события $A_1A_2,\ \overline{A}_1\overline{A}_2,\ A_1\overline{A}_2,\ \overline{A}_1A_2$ **несовместны** *(т.к. не может, например, выпасть 2 орла и в то же самое время 2 решки)* и образуют **полную группу** *(поскольку учтены **все** возможные исходы броска двух монет)*. Давайте просуммируем данные события: $A_1A_2+\overline{A}_1\overline{A}_2+A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1A_2$. Как интерпретировать эту запись? Очень просто – умножение означает логическую связку **И**, а сложение – **ИЛИ**.

Таким образом, сумму $A_1A_2+\overline{A}_1\overline{A}_2+A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1A_2$ легко прочитать понятным человеческим языком: «выпадут два орла **или** две решки **или** на 1-й монете выпадет орёл **и** на 2-й решка **или** на 1-й монете выпадет решка **и** на 2-й монете орёл »

Это был пример, когда **в одном испытании** задействовано несколько объектов, в данном случае – две монеты. Другая распространенная в практических задачах схема – это ***повторные испытания***, когда, например, один и тот же игральный кубик бросается 3 раза подряд. В качестве демонстрации рассмотрим следующие события:

$B_{(1)4}$ – в 1-м броске выпадет 4 очка;

$B_{(2)5}$ – во 2-м броске выпадет 5 очков;

$B_{(3)6}$ – в 3-м броске выпадет 6 очков.

Тогда событие $B_{(1)4} \cdot B_{(2)5} \cdot B_{(3)6}$ состоит в том, что в 1-м броске выпадет 4 очка **и** во 2-м броске выпадет 5 очков **и** в 3-м броске выпадет 6 очков. Очевидно, что в случае с кубиком будет значительно больше **комбинаций** (исходов), чем, если бы мы подбрасывали монету.

2.Ответить на контрольные вопросы (устно):

– Какие виды событий существуют?
– Что такое случайность и равновозможность события?
– Как вы понимаете термины совместность/несовместность событий?
– Что такое полная группа событий, противоположные события?
– Как определяется сумма и произведение событий?