<u>Тема:</u> Приближенное вычисление интегралов

1. ***Изучить теоретический материал, составить конспект (записать определения, примеры).***

1. Метод прямоугольников

Чтобы найти приближённое значение интеграла $\int_a^b f(x)dx$, нужно:

- разделить отрезок интегрирования $[a, b]$ на n равных частей точками $x_0 = a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n = b$;
- вычислить значения подынтегральной функции $y = f(x)$ в точках деления, т.е. найти

  $y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2),\ \ldots,\ y_{n-1} = f(x_{n-1}),\ y_n = f(x_n)$;

- воспользоваться формулой:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Delta x \cdot (f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n))$$

Для того, чтобы найти погрешность вычислений, надо воспользоваться формулами:

$$\Delta = \left|A_{точн} - A_{прибл}\right|$$

$$\delta = \frac{\Delta}{\left|A_{точн}\right|} \cdot 100\%$$

Пример 1. Вычислить по формуле прямоугольников $\int_2^5 x^2 dx$. Найти абсолютную и относительную погрешности вычислений.

Решение:

Разобьём отрезок $[a, b]$ на несколько (например, на 6) равных частей. Тогда $a = 2$, $b = 5$,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{5-2}{6} = \frac{1}{2}$$

$x_k = a + k \cdot \Delta x$

$x_0 = 2 + 0 \cdot \frac{1}{2} = 2$

$x_1 = 2 + 1 \cdot \frac{1}{2} = 2{,}5$

$x_2 = 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} =3$

$x_3 = 2 + 3 \cdot \frac{1}{2} = 3$

$x_4 = 2 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 4$

$x_5 = 2 + 5 \cdot \frac{1}{2} = 4{,}5$

$f(x_0) = 2^2 = 4$
$f(x_1) = 2{,}5^2 = 6{,}25$
$f(x_2) = 3^2 = 9$
$f(x_3) = 3{,}5^2 = 12{,}25$
$f(x_4) = 4^2 = 16$
$f(x_5) = 4{,}5^2 = 20{,}25.$

x	2	2,5	3	3,5	4	4,5
y	4	6,25	9	12,25	16	20,25

По формуле (1):

$$\int_0^3 x^2 dx \approx \frac{1}{2} \cdot (4 + 6{,}25 + 9 + 12{,}25 + 16 + 20{,}25) = \frac{1}{2} \cdot 67{,}75 = 33{,}875$$

Для того, чтобы вычислить относительную погрешность вычислений, надо найти точное значение интеграла:

$$\int_2^5 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_2^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{125}{3} - \frac{8}{3} = 39$$

$$\Delta = |39 - 33{,}875| = 5{,}125$$

$$\delta = \frac{5{,}125}{39} \cdot 100\% \approx 13{,}14\%$$

2.Метод трапеций

Метод трапеций обычно даёт более точное значение интеграла, чем метод прямоугольников. Криволинейная трапеция заменяется на сумму нескольких трапеций и приближённое значение определённого интеграла находится как сумма площадей трапеций

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + \ldots + y_{n-1}\right)$$

Пример 2. Вычислить по формуле трапеций при n =5 приближенное значение определенного интеграла $\int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$

Решение. Формула трапеций для этого примера принимает следующий вид:

$$\int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} \approx \frac{6-1}{5}\left(\frac{y_0 - y_5}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4\right)$$

Значения $y_0, y_1, \ldots, y_5$ определяются подстановкой в функцию $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$ соответственных значений x:

$x_0 = 1,\ y_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71$

$x_1 = 2,\ y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{9}} \approx 0{,}33$

$x_2 = 3,\ y_2 = \dfrac{1}{\sqrt{28}} \approx 0{,}19$

$x_3 = 4,\ y_3 = \dfrac{1}{\sqrt{65}} \approx 0{,}12$

$x_4 = 5,\ y_4 = \dfrac{1}{\sqrt{126}} \approx 0{,}09$

$x_5 = 6,\ y_5 = \dfrac{1}{\sqrt{217}} \approx 0{,}07$

Подставив эти данные в формулу трапеции, получим

$$\int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} \approx 1\left(\frac{0{,}71-0{,}07}{2} + 0{,}33 + 0{,}19 + 0{,}12 + 0{,}09\right) = 1{,}12$$

2.Вычислить интеграл по формулам интегрирования, методом прямоугольников и методом трапеций.

1. Вычислить $\int_0^1 e^x dx$, разделив отрезок [0;1] на 10 равных частей.
2. Вычислить $\int_0^4 (3x^2+4x+2)dx$, разделив отрезок [0;4] на 10 равных частей.
3. Вычислить $\int_0^8 \frac{dx}{x+1}$, разделив отрезок [0;8] на 10 равных частей.

Для решения выбрать один из интегралов, выполнить решение в рабочих тетрадях.