<u>Тема:</u> Уравнения высших степеней

1. ***Посмотреть презентацию «Уравнения высших степеней»*** [***https://yadi.sk/i/bK2UOsOrtg6Pqg***](https://yadi.sk/i/bK2UOsOrtg6Pqg)
2. ***Изучить теоретический материал, составить конспект (записать определения, примеры).***

Уравнение вида P(x)=0, где P(x) - многочлен степени n>2, записанное в виде $a_0 x^n+a_1 x^{n-1}+a_2 x^{n-2}+\ldots+a_{n-1} x+a_n=0$, называют уравнениями высших степеней, где n показывает степень уравнения.

I. Любое уравнение вида $a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0=0$ можно свести к приведенному уравнению той же степени, домножив обе его части на $(a_n)^{n-1}$ и выполнив замену переменной вида $y=a_n x$:

$$a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0=0$$
$$(a_n)^n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot(a_n)^{n-1}\cdot x^{n-1}+\ldots+a_1\cdot(a_n)^{n-1}\cdot x+a_0\cdot(a_n)^{n-1}=0$$
$$y=a_n x\Rightarrow$$
$$y^n+b_{n-1}y^{n-1}+\ldots+b_1 y+b_0=0$$

Полученные коэффициенты $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ тоже будут целыми.

Таким образом, будем решать приведенное уравнение степени *n* с целыми коэффициентами вида $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0=0$.

Теорема Безу.

Только в 11 веке таджикский поэт и ученый Омар Хайям впервые решил уравнение III степени. А установить, существует ли формула для нахождения корней любого уравнения, пытались многие. С тех пор математика пошла другим путем. Ученые стали искать другие методы решения уравнений высших степеней. Одним из них является метод разложения многочлена на множители с использованием теоремы Безу.

Формулировка теоремы Безу: Остаток от деления многочлена P(x) на двучлен (x – a) равен P(a).

Следствия из теоремы Безу

1.Число a - корень многочлена P(x) тогда и только тогда, когда P(x) делится без остатка на двучлен (x – a).

Отсюда, в частности, следует, что множество корней многочлена P(x) тождественно множеству корней соответствующего уравнения P(x) = 0.

2. Свободный член многочлена делится на любой целый корень многочлена с целыми коэффициентами (если старший коэффициент равен 1, то все рациональные корни являются и целыми).

Теорема Безу дает возможность, найдя один корень многочлена, искать далее корни многочлена, степень которого уже на единицу меньше:

если P(a) = 0, то заданный многочлен P(x) можно представить в виде:

P(x) = (x – a)Q(x)

Таким образом, один корень найден и далее находятся уже корни многочлена Q(x), степень которого на единицу меньше степени исходного многочлена. Иногда этим приемом - он называется понижением степени - можно найти все корни заданного многочлена.

Алгоритм решения.

1. Находим целые корни уравнения.

   Целые корни уравнения x_i, *i=1, 2, …, m* (*m* – количество целых корней уравнения) находятся среди делителей свободного члена a_0. То есть, первым делом выписываем делители свободного члена и подставляем их по очереди в исходное равенство для проверки. Перебираем их по очереди, пока не получим тождество. Как только тождество получено, то первый целый корень уравнения найден и уравнение предстает в виде $(x-x_1)\cdot P_{n-1}(x)=0$, где x_1 - корень уравнения, а $P_{n-1}(x)$ - частное от деления $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ на $(x-x_1)$.

   Продолжаем подставлять выписанные ранее делители в уравнение $P_{n-1}(x)=0$, начиная с x_1 (так как корни могут повторяться). Как только получаем тождество, то корень x_2 найден и уравнение предстает в виде $(x-x_1)(x-x_2)\cdot P_{n-2}(x)=0$, где $P_{n-2}(x)$ - частное от деления $P_{n-1}(x)$ на $(x-x_2)$.

   И так продолжаем перебор делителей, начиная с x_2. В итоге найдем все *m* целых корней уравнения и оно представится в виде $(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_m)\cdot P_{n-m}(x)=0$, где $P_{n-m}(x)$ - многочлен степени *n-m*. Весь этот процесс удобно проводить по схеме Горнера.

   Дробных корней приведенное уравнение с целыми коэффициентами иметь не может.

2. Находим оставшиеся корни (иррациональные и/или комплексные) из уравнения $P_{n-m}(x)=0$ любым способом.

Пример 1.

Решить уравнение $x^4+x^3+2x^2-x-3=0$.

Решение.

Во-первых, найдем все целые корни данного уравнения.

Свободным членом является *-3*. Его делителями являются числа *1, -1, 3* и *-3*.

Будем подставлять их по очереди в исходное равенство до получения тождества.

При *x=1* имеем $1^4+1^3+2\cdot1^2-1-3=0$. То есть *x=1* является корнем уравнения.

Разделим многочлен $x^4+x^3+2x^2-x-3$ на *(x-1)* столбиком:

$$
\begin{array}{r|l}
x^4-x^3-2x^2-x-3 & x-1 \\ \cline{2-2}
-\underline{x^4-x^3} & x^3+2x^2+4x+3 \\
2x^3-2x^2-x-3 & \\
-\underline{2x^3-2x^2} & \\
4x^2-x-3 & \\
-\underline{4x^2-4x} & \\
3x-3 & \\
-\underline{3x-3} & \\
0 &
\end{array}
$$

Следовательно, $x^4+x^3+2x^2-x-3=(x-1)(x^3+2x^2+4x+3)$.

Продолжим перебор делителей, но уже для равенства $x^3+2x^2+4x+3=0$:

$1^3+2\cdot 1^2+4\cdot 1+3=10\neq 0$

$(-1)^3+2\cdot(-1)^2+4\cdot(-1)+3=0$

При *x = -1* получили верное равенство, следовательно, *-1* является корнем уравнения.

Разделим x^3+2x^2+4x+3 на *(x+1)* столбиком:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+2x^2+4x+3 & x+1 \\ \cline{2-2}
-\underline{x^3+x^2} & x^2+x+3 \\
x^2+4x+3 & \\
-\underline{x^2+x} & \\
3x+3 & \\
-\underline{3x+3} & \\
0 &
\end{array}
$$

Таким образом,

$x^4+x^3+2x^2-x-3=(x-1)(x^3+2x^2+4x+3)=$
$=(x-1)(x+1)(x^2+x+3)$

Оставшиеся корни исходного уравнения являются корнями квадратного трехчлена x^2+x+3.

$D = 1^2 - 4\cdot 1\cdot 3 = -11 < 0$, то есть, действительных корней трехчлен не имеет, но имеет пару комплексно сопряженных $x = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{11}}{2}$.

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = -1$; $x_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{11}}{2}$

Пример 2: Решим уравнение $x^3 + 2x^2 - 1 = 0$

Решение: Если это уравнение имеет целый корень, то он является делителем свободного члена (-1), т.е. равняется одному из чисел: ± 1. Проверка показывает, что корнем уравнения является число -1. Значит, многочлен

$P_3(x) = x^3 + 2x^2 - 1$ можно представить в виде произведения $P_3(x) = (x + 1)P_2(x)$, т.е. многочлен $P_3(x)$ можно без остатка разделить на двучлен (x+1). Выполним такое деление “углом”:

$x^3 + 2x^2 – 1 \,\underline{|\, x+1}$

$\underline{x^3 + x^2}$ $\quad x^2+x-1$

$0x^3+ x^2- 1$

$\underline{x^2 + x}$

$0x^2 -x – 1$

$\underline{-x – 1}$

0

Таким образом, мы фактически разложили левую часть уравнения на множители: $(x+1)(x^2 + x–1) = 0$.

Произведение множителей равно нулю, если один из множителей равен нулю. Получаем два уравнения:

$x + 1 = 0$ $x^2 + x – 1 = 0$

$x_1 = -1$ $D = 1 + 4 = 5$

$x_{2,3} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

Ответ: $x_1 = -1$; $x_{2,3} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

II. Схема Горнера

Пример 3. Решить уравнение $x^3 + 2x + 3 = 0$
Все корни этого уравнения находятся среди делителей свободного члена 3: ±1; ±3
Очевидно, что число – 1 является корнем данного уравнения: $(-1)^3 + 2 \cdot (-1) + 3 = 0$

Сначала запишем многочлен **со всеми**, в том числе нулевыми коэффициентами:
$x^3 + 0\cdot x^2 + 2x + 3$, после чего занесём эти коэффициенты (строго по порядку) в верхнюю строку

таблицы:

	1	0	2	3

Слева записываем корень $x = -1$:

	1	0	2	3
-1				

Сразу же оговорюсь, что схема Горнера работает и в том случае, если «красное» число **не** является корнем многочлена.

Сносим сверху старший коэффициент:

	1	0	2	3
-1	1			

Процесс заполнения нижних ячеек чем-то напоминает вышивание, где «минус единица» – это своеобразная «игла», которая пронизывает последующие шаги. «Снесённое» число умножаем на (–1) и прибавляем к произведению число 0 из верхней ячейки:

	1	0	2	3
-1	1	$1 \cdot (-1) + 0 = -1$		

Найденное значение умножаем на «красную иглу» и к произведению прибавляем следующий коэффициент уравнения:

	1	0	2	3
-1	1	-1	$-1 \cdot (-1) + 2 = 3$	

И, наконец, полученное значение снова «обрабатываем» «иглой» и верхним коэффициентом:

	1	0	2	3
-1	1	-1	3	$3 \cdot (-1) + 3 = 0$

Ноль в последней ячейке говорит нам о том, что многочлен $x^3 + 2x + 3$ разделился на $x + 1$ <u>без остатка</u>, при этом коэффициенты разложения «снимаются» прямо из нижней строки таблицы:

	1	0	2	3
-1	1	-1	3	0

$$x^3 + 2x + 3 = (x - (-1)) \cdot (1 \cdot x^2 - 1 \cdot x + 3) + 0$$

Таким образом, от уравнения $x^3 + 2x + 3 = 0$ мы перешли к равносильному уравнению $(x+1) \cdot (x^2 - x + 3) = 0$.

$x + 1 = 0$; $\qquad x^2 - x + 3 = 0$

$x = -1$ $\qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{-11}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{11 \cdot (-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{11} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{11} i}{2}$

Ответ: $x_1 = -1$; $x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{11} i}{2}$

2.Выполнить практическую работу (по вариантам)

I вариант.

Решить уравнение $x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$.

II вариант.

Решить уравнение $x^3 + 3x^2 + 4x - 8 = 0$.

III вариант.

Решить уравнение $x^3 - 3x^2 + 3x - 9 = 0$;

IV вариант.

Решить уравнение $x^3 + 2x^2 - 5x - 10 = 0$;

1 вариант	Александрова Е., Зямилева М., Бахаев А., Кузнецова А., Байко А.
2 вариант	Архипов П., Копытин А., Кириллова Е., Шабрацкий А., Лавров И.
3 вариант	Андрианычев А., Саввич Д., Скрыков С., Кукушкина А.
4 вариант	Грачева В., Минеева А., Светилов А., Рагрин С., Салтыков В.

Все практические работы выполнить на отдельных листках (оформлять аккуратно, разборчивым почерком) сфотографировать и отправить на электронную почту: **olga.georg.gor@yandex.ru**