

**Тема: Приложения определенного интеграла**

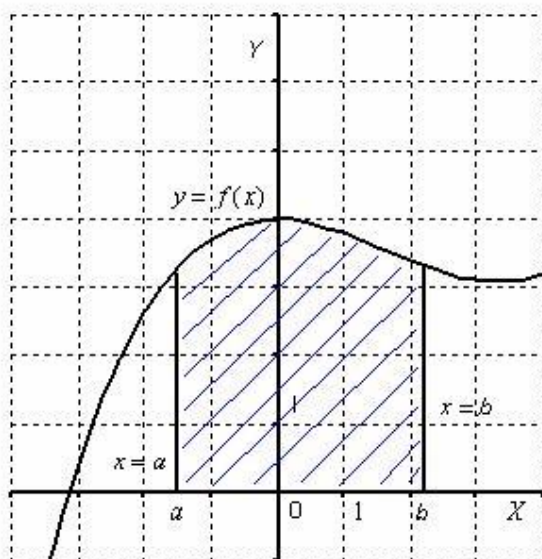
**1. Изучить теоретический материал, составить конспект (записать определения, примеры, выполнить чертежи).**

Переходим к рассмотрению приложений интегрального исчисления.

**1. Вычисление площадей фигур.**

Криволинейной трапецией называется плоская фигура, ограниченная графиком непрерывной и не меняющей на отрезке  $[a; b]$  функции  $y = f(x)$ , прямыми  $x = a$ ,  $x = b$ , осью  $OX$ .

Пусть данная фигура расположена *не ниже* оси абсцисс:

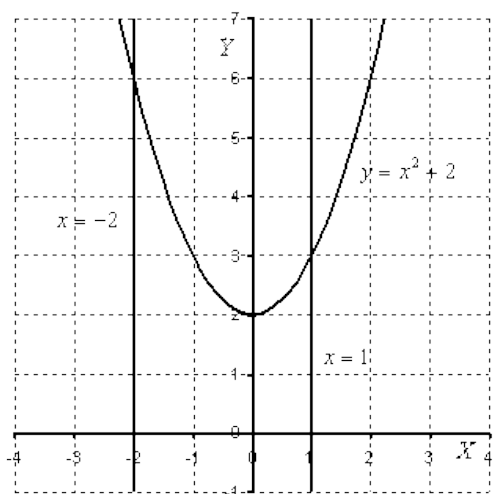


Тогда площадь криволинейной трапеции численно равна определенному интегралу

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

**Пример 1**

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2 + 2$ ,  $y = 0$ ,  $x = -2$ ,  $x = 1$ .



На отрезке  $[-2;1]$  график функции  $y = x^2 + 2$  расположен **над осью**  $OX$ , поэтому:

$$S = \int_{-2}^1 (x^2 + 2) dx = \left( \frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_{-2}^1 = \frac{1}{3} + 2 - \left( -\frac{8}{3} - 4 \right) = \frac{1}{3} + 2 + \frac{8}{3} + 4 = 9$$

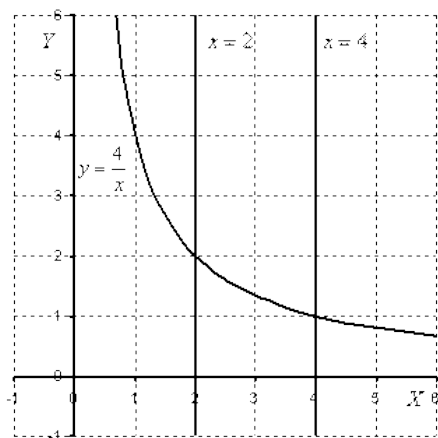
Ответ:  $S = 9 \text{ ед}^2$

### Пример 2

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $xy = 4$ ,  $x = 2$ ,  $x = 4$  и осью  $OX$

**Решение:**

Выполним чертеж:



На отрезке  $[2;4]$  график функции  $y = \frac{4}{x}$  расположен над осью  $OX$ , поэтому:

$$S = \int_2^4 \frac{4 dx}{x} = 4(\ln x) \Big|_2^4 = 4(\ln 4 - \ln 2) = 4 \ln \frac{4}{2} = 4 \ln 2$$

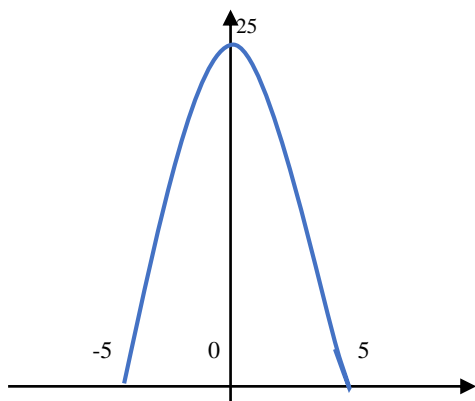
Ответ:  $S = 4 \ln 2 \text{ ед}^2 \approx 2,77 \text{ ед}^2$

### Пример 3

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = 25 - x^2$ ,  $y = 0$ .

Найдем точки пересечения графиков этих функций:  $25 - x^2 = 0$ ;  $x = -5$ ;  $x = 5$ .

Построим график функции  $y = 25 - x^2$



Так как криволинейная трапеция симметрична относительно оси ординат, то можно найти ее площадь не на отрезке  $[-5;5]$ , а на отрезке  $[0;5]$ , а затем ее удвоить:

$$S = 2 \int_0^5 (25 - x^2) dx = 2 \left( 25x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^5 = 2 \left( \left( 25 \cdot 5 - \frac{5^3}{3} \right) - \left( 25 \cdot 0 - \frac{0^3}{3} \right) \right) = \frac{500}{3}$$

Ответ:  $S = 500/3 \text{ ед}^2$

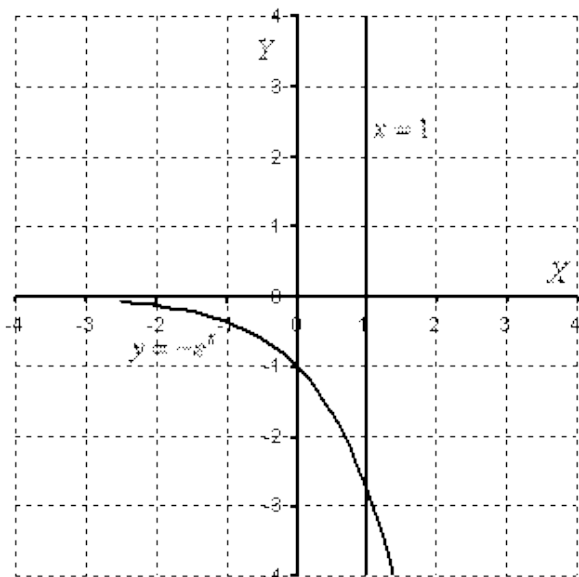
Если криволинейная трапеция расположена под осью  $OX$  (или, по крайней мере, не выше данной оси), то её площадь можно найти по формуле:

$$S = -\int_a^b f(x) dx$$

Пример 4

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = -e^x$ ,  $x = 1$  и координатными осями.

**Решение:** Выполним чертеж:



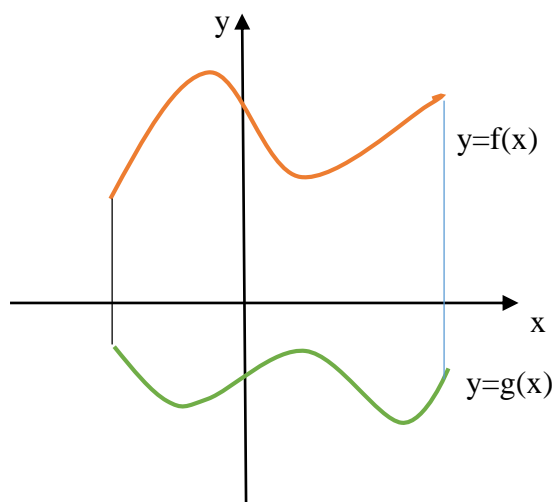
$$S = -\int_0^1 (-e^x) dx = \int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

Ответ:  $S = (e - 1) \text{ ед}^2 \approx 1,72 \text{ ед}^2$

Если на отрезке  $[a, b]$  некоторая непрерывная функция  $f(x)$  больше либо равна некоторой непрерывной функции  $g(x)$ , то площадь фигуры, ограниченной графиками данных

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

функций и прямыми  $x = a$ ,  $x = b$ , можно найти по формуле:



### Пример 5

Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями  $y = 2x - x^2$ ,  $y = -x$ .

**Решение:** Сначала нужно выполнить чертеж. Вообще говоря, при построении чертежа в задачах на площадь нас больше всего интересуют точки пересечения линий. Найдем точки пересечения параболы  $y = 2x - x^2$  и прямой  $y = -x$ .

Решаем уравнение:

$$2x - x^2 = -x$$

$$3x - x^2 = 0$$

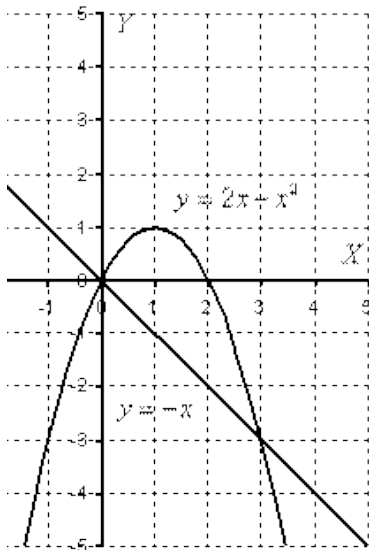
$$x(3 - x) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 3$$

$$y_1 = 0, y_2 = -3$$

Значит, нижний предел интегрирования  $a = 0$ , верхний предел интегрирования  $b = 3$ .

Выполним чертеж: Прямая  $y = -x$  проходит через точки  $(0;0)$  и  $(3; -3)$ , парабола с вершиной  $(1; 1)$  проходит через эти же точки.



Здесь уже не надо думать, где расположена фигура – над осью или под осью, и, грубо говоря, **важно, какой график ВЫШЕ** (относительно другого графика), **а какой – НИЖЕ**.

В рассматриваемом примере очевидно, что на отрезке  $[0; 3]$  парабола располагается выше прямой, а поэтому из  $2x - x^2$  необходимо вычесть  $-x$

Искомая фигура ограничена параболой  $y = 2x - x^2$  сверху и прямой  $y = -x$  снизу.

На отрезке  $[0; 3]$   $2x - x^2 \geq -x$ , по соответствующей формуле:

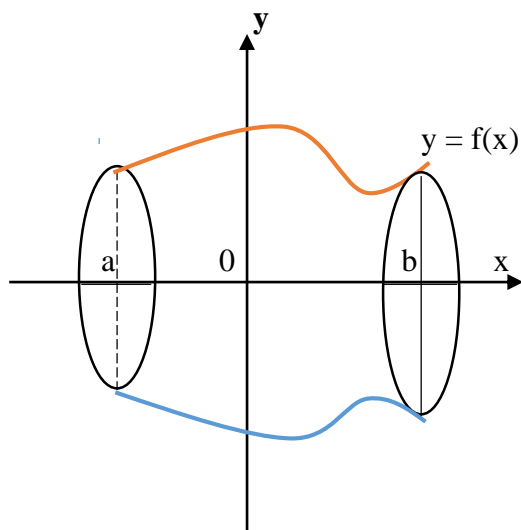
$$S = \int_0^3 (2x - x^2 - (-x)) dx = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \left( \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} - 0 + 0 = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

$$S = 4\frac{1}{2} \text{ ед}^2$$

Ответ:

## 2. Вычисление объемов тел вращения.

Представьте некоторую плоскую фигуру (криволинейную трапецию) на координатной плоскости. Её площадь мы уже находили. Но, кроме того, данную фигуру можно ещё и вращать вокруг оси абсцисс или вокруг оси ординат. Полученное тело называют телом вращения.



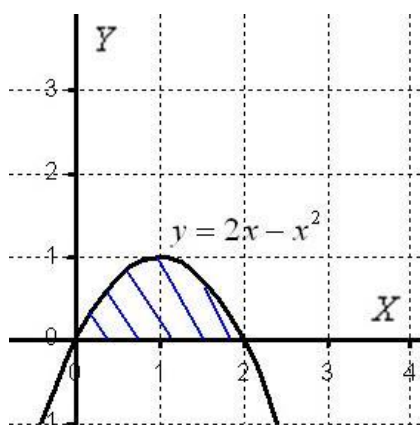
Объем тела вращения можно вычислить по формуле:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

### Пример 6

Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями  $y = 2x - x^2$ ,  $y = 0$  вокруг оси  $OX$ .

**Решение:** Как и в задаче на нахождение площади, решение начинается с чертежа плоской фигуры. То есть, на плоскости  $XOY$  необходимо построить фигуру, ограниченную линиями  $y = 2x - x^2$ ,  $y = 0$ , при этом не забываем, что уравнение  $y = 0$  задаёт ось  $OX$ .



Искомая плоская фигура заштрихована синим цветом, именно она и вращается вокруг оси  $OX$ . В результате вращения получается такая немного яйцевидная летающая тарелка, которая

симметрична относительно оси  $OX$ . Вычислим объем тела вращения, используя формулу:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) dx =$$

$$= \pi \cdot \left( \frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \pi \cdot \left( \frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} - 0 \right) = \frac{16\pi}{15}$$

**Ответ:**  $V = \frac{16\pi}{15} \text{ ед}^3 \approx 3,35 \text{ ед}^3$ .

### 3. Вычисление пути, пройденного точкой

Путь, пройденный точкой при неравномерном движении по прямой с переменной скоростью  $v = f(t) \geq 0$  за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$ , вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt.$$

**Пример 7.** Скорость движения точки изменяется по закону  $v = (3t^2 + 2t + 1)$  м/с. Найти путь, пройденный точкой за 10 с от начала движения.

**Решение.** Согласно условию,  $f(t) = 3t^2 + 2t + 1$ ,  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 10$ . По формуле (2) находим

$$S = \int_0^{10} (3t^2 + 2t + 1) dt = [t^3 + t^2 + t]_0^{10} = 10^3 + 10^2 + 10 = 1110 \text{ (м)}.$$

### 4. Вычисление работы силы

Работа, произведенная переменной силой  $f(x)$  при перемещении по оси  $O_x$  материальной точки от  $x = a$  до  $x = b$ , находится по формуле

$$A = \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

При решении задач на вычисление работы силы часто используется закон Гука:

$$F = kx, \quad (2)$$

где  $F$  - сила, Н;  $x$  - абсолютное удлинение пружины, м, вызванное силой  $F$ , а  $k$  - коэффициент пропорциональности, Н/м.

**Пример 8.** Сжатие  $x$  винтовой пружины пропорционально приложенной силе  $F$ . Вычислить работу силы  $F$  при сжатии пружины на 0,04 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила 10 Н.

**Решение.** Так как,  $x = 0,01$  м при  $F = 10$  Н, то, подставляя эти значения в равенство (2), получим  $10 = k \cdot 0,01$ , откуда  $k = 1000$  Н/м. Подставив теперь в это же равенство значение  $k$ , находим  $F = 1000x$ , т. е.  $f(x) = 1000x$ . Искомую работу найдем по формуле (1), полагая  $a = 0$ ,  $b = 0,04$  :

$$A = \int_0^{0,04} 1000x dx = 500x^2 \Big|_0^{0,04} = 0,8 \text{ (Дж)}.$$

## **2. Выполнить практическую работу (по вариантам)**

### **ВАРИАНТ 1**

1. Вычислить определенный интеграл:  $\int_0^3 (2x^2 - x + 4) dx$ .
2. Скорость движения точки изменяется по закону  $v = 3t^2 + 2t + 1$  (м/с). Найти путь  $S$ , пройденный точкой за 10 с от начала движения.
3. Вычислить, предварительно сделав рисунок, площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = -x^2 + 16$ ,  $y = 0$ .

### **ВАРИАНТ 2**

1. Вычислить определенный интеграл:  $\int_0^2 (4x^2 + x - 3) dx$ .
2. Вычислить, предварительно сделав рисунок, площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = -x^2 + 4$ ,  $y = 0$ ,
3. Скорость движения точки изменяется по закону  $v = 6t^2 + 4t + 1$  (м/с). Найти путь  $S$ , пройденный точкой за 10 с от начала движения.

### **ВАРИАНТ 3**

1. Вычислить определенный интеграл:  $\int_0^1 (3x^2 + 2x - 3) dx$ .
2. Скорость движения точки изменяется по закону  $v = 6t^2 - 4t$  (м/с). Найти путь  $S$ , пройденный точкой за 5 с от начала движения.
3. Вычислить, предварительно сделав рисунок, площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = -x^2 + 4$ ,  $y = 0$ ,

### **ВАРИАНТ 4**

1. Вычислить определенный интеграл:  $\int_0^3 (3x^2 - 2x + 5) dx$ .

2. Вычислить, предварительно сделав рисунок, площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = -x^2 + 25$ ,  $y = 0$ .
3. Скорость движения точки изменяется по закону  $v = 5t^2 - 3t$  (м/с). Найти путь  $S$ , пройденный точкой за 5 с от начала движения.

#### ВАРИАНТ 5

1. Вычислить определенный интеграл:  $\int_1^2 (4x^2 - 2x + 1) dx$ .
2. Скорость движения точки изменяется по закону  $v = 3t^2 - 4t$  (м/с). Найти путь  $S$ , пройденный точкой за третью секунду.
3. Вычислить, предварительно сделав рисунок, площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = -x^2 + 4$ ,  $y = 0$ .

#### ВАРИАНТ 6

1. Вычислить определенный интеграл:  $\int_1^2 (x^2 - 3x - 1) dx$ .
2. Вычислить, предварительно сделав рисунок, площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = -x^2 + 9$ ,  $y = 0$ ,  $x = -1$ ,  $x = 1$
3. Скорость движения точки изменяется по закону  $v = 3t^2 - 8t$  (м/с). Найти путь  $S$ , пройденный точкой за 4 с от начала движения.

1 вариант	Александрова Е., Зямилева М., Кузнецова А.
2 вариант	Архипов П., Копытин А., Кириллова Е.
3 вариант	Бахаев А., Шабрацкий А., Лавров И.
4 вариант	Грачева В., Минеева А., Светилов А.
5 вариант	Рагрин С., Салтыков., Байко А.
6 вариант	Андрианычев А., Саввич Д., Скрыков С., Кукушкина А.

Все практические работы выполнить на отдельных листках (оформлять аккуратно, разборчивым почерком) сфотографировать и отправить на электронную почту: **[olga.georg.gor@yandex.ru](mailto:olga.georg.gor@yandex.ru)**