https://yadi.sk/d/SEn4OvHSDWUh7Q

Тема: Понятие определенного интеграла. Свойства определенного интеграла. Задача о нахождении площади криволинейной трапеции. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление определенного интеграла.

1. ***Посмотреть презентацию «Определенный интеграл и его свойства».*** [***https://yadi.sk/i/FMn08LUSK7vKRA***](https://yadi.sk/i/FMn08LUSK7vKRA)
2. ***Изучить теоретический материал, составить конспект.***

1.Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке [a,b].

Если при любом разбиении отрезка [a, b] на части и при любом выборе точек на каждой части интегральная сумма стремится к одному и тому же пределу, то его называют определенным интегралом

и обозначают: $\int_a^b f(x)dx$

Что прибавилось по сравнению с неопределенным интегралом? Прибавились *пределы интегрирования*.

Нижний предел интегрирования стандартно обозначается буквой a .

Верхний предел интегрирования стандартно обозначается буквой b .

Отрезок $[a;b]$ называется *отрезком интегрирования*.

Теорема существования определенного интеграла.

Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a,b], то предел интегральной суммы существует и не зависит от способа разбиения отрезка [a,b] на элементарные отрезки и от выбора точек c_i.

Если $f(x) > 0$ на отрезке [a,b], то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ геометрически представляет собой площадь криволинейной трапеции-фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$.

Основные свойства определенного интеграла.

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)$
2. $\int_a^a f(x)dx = 0$
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
4. $\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$

5. $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$, где C- const.

6. Оценка определенного интеграла:

Если m≤f(x)≤M на отрезке [a,b],то $m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a)$

Правила вычисления определенного интеграла

1. Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где F(x)-первообразная для f(x).

1) Сначала находим первообразную функцию $F(X)$ (неопределенный интеграл). Обратите внимание, что константа C в определенном интеграле **не добавляется**. Обозначение $\Big|_a^b$ является чисто техническим, и вертикальная палочка не несет никакого математического смысла, по сути – это просто отчёркивание.

2) Подставляем значение верхнего предела в первообразную функцию: $F(b)$.

3) Подставляем значение нижнего предела в первообразную функцию: $F(a)$.

4) Рассчитываем разность $F(b)-F(a)$, то есть, находим число.

<u>Пример 1</u>

Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^2 2x^2dx$$

Решение:

$$\int_1^2 2x^2dx \overset{(1)}{=} 2\int_1^2 x^2dx \overset{(2)}{=} \frac{2}{3}(x^3)\Big|_1^2 \overset{(3)}{=} \frac{2}{3}(2^3-1^3) = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{2}{3}\cdot 7 = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$

(1) Выносим константу за знак интеграла.

(2) Интегрируем по таблице с помощью формулы $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$. Появившуюся константу $\frac{1}{3}$ целесообразно отделить от x^3 и вынести за скобку. Делать это не обязательно, но желательно – зачем лишние вычисления?

(3) Используем формулу Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(X)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$. Сначала подставляем в x^3 верхний предел, затем – нижний предел. Проводим дальнейшие вычисления и получаем окончательный ответ.

<u>Пример 2</u>

Вычислить определенный интеграл

$$\int_{-2}^{4}(8+2x-x^2)dx$$

Решение:

$$\int_{-2}^{4}(8+2x-x^2)dx=\left(8x+x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{4}=$$

$$=\left(32+16-\frac{64}{3}\right)-\left(-16+4+\frac{8}{3}\right)=\frac{80}{3}+\frac{28}{3}=36$$

Совет: перед тем, как использовать формулу Ньютона-Лейбница, полезно провести проверку: а сама-то первообразная найдена правильно?

Так, применительно к рассматриваемому примеру: перед тем, как в первообразную функцию $8x+x^2-\frac{x^3}{3}$ подставлять верхний и нижний пределы, желательно на черновике проверить, а правильно ли вообще найден неопределенный интеграл? Дифференцируем:

$$\left(8x+x^2-\frac{x^3}{3}\right)'=8(x)'+(x^2)'-\frac{1}{3}(x^3)'=8\cdot 1+2x-\frac{1}{3}\cdot 3x^2=8+2x-x^2$$

Получена исходная подынтегральная функция, значит, неопределенный интеграл найден верно. Теперь можно и формулу Ньютона-Лейбница применить.

Такая проверка будет не лишней при вычислении любого определенного интеграла.

<u>Пример 3.</u>

Вычислить определенный интеграл.

$$\int_{0}^{1}\mathrm{x}d\mathrm{x}=\frac{1}{2}\mathrm{x}^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}(1^2-0^2)=\frac{1}{2}.$$

2.Замена переменной в определенном интеграле

Для определенного интеграла справедливы все типы замен, что и для неопределенного интеграла. Таким образом следует повторить урок **Методы интегрирования**.

Здесь нет ничего страшного или сложного. Новизна состоит в вопросе, **как поменять пределы интегрирования при замене**.

<u>Пример 4</u>

Вычислить определенный интеграл

$$\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{xdx}{\sqrt{x^4+16}}$$

Главный вопрос здесь вовсе не в определенном интеграле, а в том, как правильно провести замену. Смотрим в **таблицу интегралов** и прикидываем, на что у нас больше всего похожа

подынтегральная функция? Очевидно, что на длинный логарифм: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right| + C$.
Но в табличном интеграле под корнем x^2, а в нашем – «икс» в четвёртой степени. Из рассуждений следует и идея замены – неплохо бы нашу четвертую степень как-нибудь превратить в квадрат. Это реально.

Сначала готовим наш интеграл к замене:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{x^4+16}} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2)^2+16}} = (*)$$

Из вышеуказанных соображений совершенно естественно напрашивается замена: $t = x^2$
Таким образом, в знаменателе будет всё хорошо: $\sqrt{t^2+16}$.
Выясняем, во что превратится оставшаяся часть xdx подынтегрального выражения, для этого находим дифференциал dt:

$$dt = 2xdx \Rightarrow xdx = \frac{dt}{2}$$

По сравнению с заменой в неопределенном интеграле у нас добавляется дополнительный этап.

Находим новые пределы интегрирования.

Это достаточно просто. Смотрим на нашу замену $t = x^2$ и старые пределы интегрирования $a = 0$, $b = \sqrt{3}$.

Сначала подставляем в выражение замены $t = x^2$ нижний предел интегрирования, то есть, ноль:

$$t_1 = 0^2 = 0$$

Потом подставляем в выражение замены $t = x^2$ верхний предел интегрирования, то есть, корень из трёх:

$$t_2 = (\sqrt{3})^2 = 3$$

Продолжаем решение.

$$(*) \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{t^2+16}} \overset{(2)}{=} \frac{1}{2}\left(\ln\left|t+\sqrt{t^2+16}\right|\right)\Big|_0^3 \overset{(3)}{=} \frac{1}{2}\left(\ln\left(3+\sqrt{25}\right) - \ln\left(0+\sqrt{0+16}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}(\ln 8 - \ln 4) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{8}{4}\right) = \frac{\ln 2}{2} \approx 0,35$$

(1) В соответствии с заменой **записываем новый интеграл с новыми пределами интегрирования**.

(2) Это простейший табличный интеграл, интегрируем по таблице. Константу $\frac{1}{2}$ лучше оставить за скобками (можно этого и не делать), чтобы она не мешалась в дальнейших вычислениях. Справа отчеркиваем линию с указанием новых пределов интегрирования $\Big|_0^3$ – это подготовка для применения формулы Ньютона-Лейбница.

(3) Используем формулу Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(X)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Ещё одно отличие от неопределенного интеграла состоит в том, что, после того, как мы провели замену, **никаких обратных замен проводить не надо**.

Пример 5

$\int_0^1 \frac{xdx}{(1+x^2)^3}$. Сделаем замену переменной: $t = 1 + x^2$, $\frac{dt}{2} = xdx$. Изменим пределы интегрирования: при $x = 0$ получим $t = 1 + 0^2 = 1$, при $x = 1$ $t = 1 + 1^2 = 2$.

$$\int_0^1 \frac{xdx}{(1+x^2)^3} = \int_1^2 \frac{1}{2}\frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2}\int_1^2 t^{-3}dt = -\frac{1}{4}\frac{1}{t^2}\Big|_1^2 = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2}\right) = -\frac{3}{16}.$$

Пример 6

$$\int_0^1 x^3 \cdot e^{x^4} dx = \left| x^4 = t; d(x^4) = dt; 4x^3dx = dt; x^3dx = \frac{1}{4}dt; t_1 = 0^2 = 0; t_2 = 1^2 = 1 \right| =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 e^t dt = \frac{1}{4}e^t\Big|_0^1 = \frac{1}{4}e^1 - \frac{1}{4}e^0 = \frac{1}{4}e - \frac{1}{4}$$

3.Метод интегрирования по частям в определенном интеграле

Все выкладки темы **Интегрирование по частям в неопределенном интеграле** в полной мере справедливы и для определенного интеграла.
Плюсом идёт только одна деталь, в формуле интегрирования по частям добавляются пределы интегрирования:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

Формулу Ньютона-Лейбница здесь необходимо применить дважды: для произведения uv и, после того, как мы возьмем интеграл $\int_a^b vdu$.

Пример 7

$$\int_0^1 x\ell^{-x}dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \ell^{-x}dx & v = -\ell^{-x} \end{bmatrix} = -x\ell^{-x}\Big|_0^1 - \int_0^1 -\ell^{-x}dx =$$

$$= -x\ell^{-x}\Big|_0^1 - \ell^{-x}\Big|_0^1 = -2\ell^{-1} + 1$$

Пример 8. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx.$$

Решение. На основании таблицы основных интегралов и формул интегрирования имеем (интегрируем по частям)

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx = \begin{vmatrix} u = x^2; & du = 2x dx \\ dv = \sin x dx; & v = -\cos x \end{vmatrix} = -x^2 \cos x \Big|_0^{\pi} +$$

$$+ \int_0^{\pi} 2x \cos x dx = \pi^2 + 2\int_0^{\pi} x \cos x dx = \begin{vmatrix} u = x; & du = dx \\ dv = \cos x dx; & v = \sin x \end{vmatrix} =$$

$$= \pi^2 + 2\left(x \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx \right) = \pi^2 + 2\cos x \Big|_0^{\pi} = \pi^2 - 2 - 2 =$$

$$= \pi^2 - 4.$$

3.Выполнить домашнее задание:

Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^5 \frac{7dx}{x}$$

$$\int_{-3}^{1} (2x^2 + 3x - 1)dx$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\cos^2 x + 1}$$

$$\int_0^1 x^2 \cdot e^{x^3} dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot cosxdx$$

Все практические работы выполнить на отдельных листках (оформлять аккуратно, разборчивым почерком) сфотографировать и отправить на электронную почту: **olga.georg.gor@yandex.ru**