<u>Тема:</u> «Основные элементарные функции, их свойства и графики»

Материал сегодняшнего урока необходим для изучения следующих тем и является повторением изученного ранее материала. Поэтому данную лекцию нужно внимательно прочитать и кратко законспектировать.

Линейная функция

Линейная функция задается уравнением $y = ax + b$. График линейной функций представляет собой **прямую**. Для того, чтобы построить прямую достаточно знать две точки.

<u>Пример 1</u>

Построить график функции $y = 2x + 1$. Найдем две точки. В качестве одной из точек выгодно выбрать ноль.

Если $x = 0$, то $y = 2 \cdot 0 + 1 = 1$

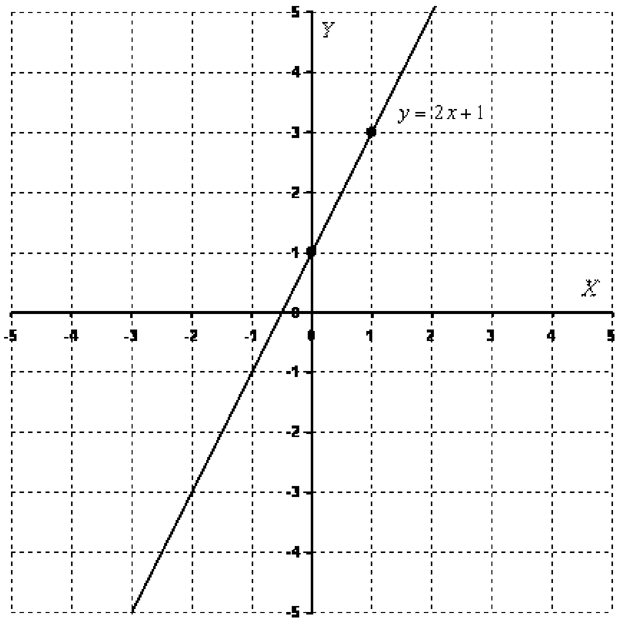
Берем еще какую-нибудь точку, например, 1.

Если $x = 1$, то $y = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

При оформлении заданий координаты точек обычно сводятся в таблицу:

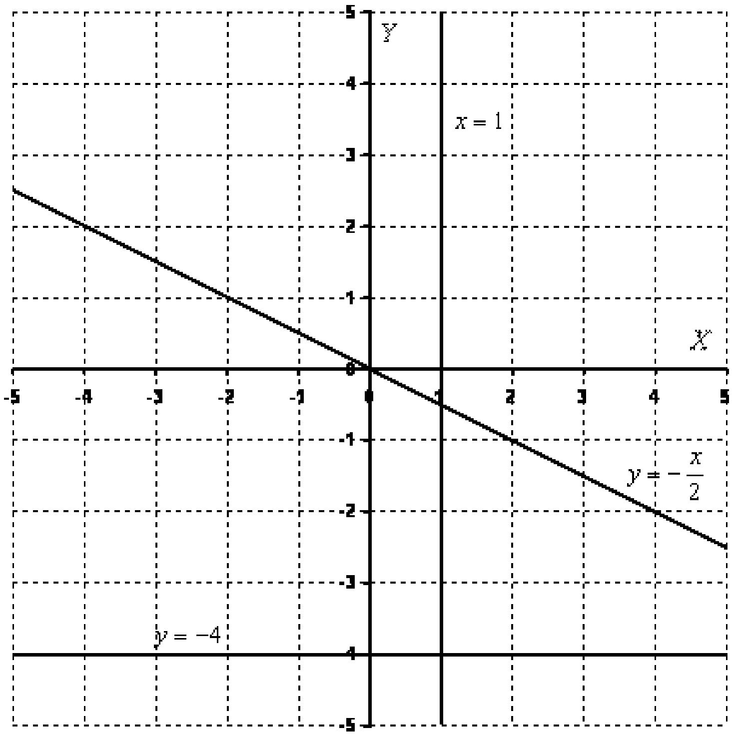
x	0	1
y	1	3

Две точки найдены, выполним чертеж:



При оформлении чертежа всегда подписываем графики.

Не лишним будет вспомнить частные случаи линейной функции:



1) Например, $y = -\frac{x}{2}$. График прямой пропорциональности всегда проходит через начало координат. Таким образом, построение прямой упрощается – достаточно найти всего одну точку.

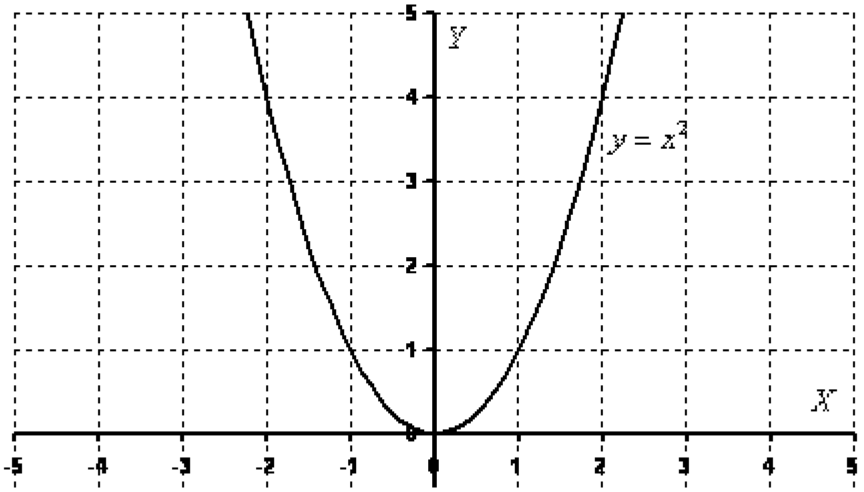
2) Уравнение вида $y = b$ задает прямую, параллельную оси OX, в частности, сама ось OX задается уравнением $y = 0$. График функции строится сразу, без нахождения всяких точек. То есть, запись $y = -4$ следует понимать так: «игрек всегда равен –4, при любом значении икс».

3) Уравнение вида $x = b$ задает прямую, параллельную оси OY, в частности, сама ось OY задается уравнением $x = 0$. График функции также строится сразу. Запись $x = 1$ следует понимать так: «икс всегда, при любом значении игрек, равен 1».

Построение прямой – самое распространенное действие при выполнении чертежей.

График квадратичной, кубической функции, график многочлена

Парабола. График квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) представляет собой параболу. Рассмотрим знаменитый случай: $y = x^2$



Вспоминаем некоторые свойства функции $y = x^2$.

Область определения – любое действительное число (любое значение «икс»). Что это значит? Какую бы точку на оси OX мы не выбрали – для каждого «икс» существует точка параболы. Математически это записывается так: $D(f) = \Re$. Область определения любой функции стандартно обозначается через $D(f)$ или $D(y)$. Буква $\Re$ обозначает множество действительных чисел или, проще говоря, «любое икс» (когда работа оформляется в тетради, пишут не фигурную букву $\Re$, а жирную букву **R**).

Область значений – это множество всех значений, которые может принимать переменная «игрек». В данном случае: $E(f) = [0;+\infty)$ – множество всех положительных значений, включая ноль. Область значений стандартно обозначается через $E(f)$ или $E(y)$.

Функция $y = x^2$ является **чётной. Если функция является чётной, то ее график симметричен относительно оси** OY. Это очень полезное свойство, которое заметно упрощает построение графика. Аналитически чётность функции выражается условием $f(-x) = f(x)$. Как проверить любую функцию на чётность? **Нужно вместо** x **подставить в уравнение** $-x$. В случае с параболой проверка выглядит так: $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, значит, функция $y = x^2$ является четной.

Функция $y = x^2$ **не ограничена сверху**.

Пример 2

Построить график функции $f(x) = -x^2 + 2x$.

В этом примере мы рассмотрим важный технический вопрос: **Как быстро построить параболу?** В практических заданиях необходимость начертить параболу возникает очень часто, в частности, при вычислении **площади фигуры с помощью**

определенного интеграла. Поэтому чертеж желательно научиться выполнять быстро, с минимальной потерей времени.

Сначала находим вершину параболы. Для этого берём первую производную и приравниваем ее к нулю:

$$f'(x) = (-x^2 + 2x)' = -2x + 2 = 0$$

Итак, решение нашего уравнения: $x = 1$ – именно в этой точке и находится вершина параболы. Рассчитываем соответствующее значение «игрек»:

$$f(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 = -1 + 2 = 1$$

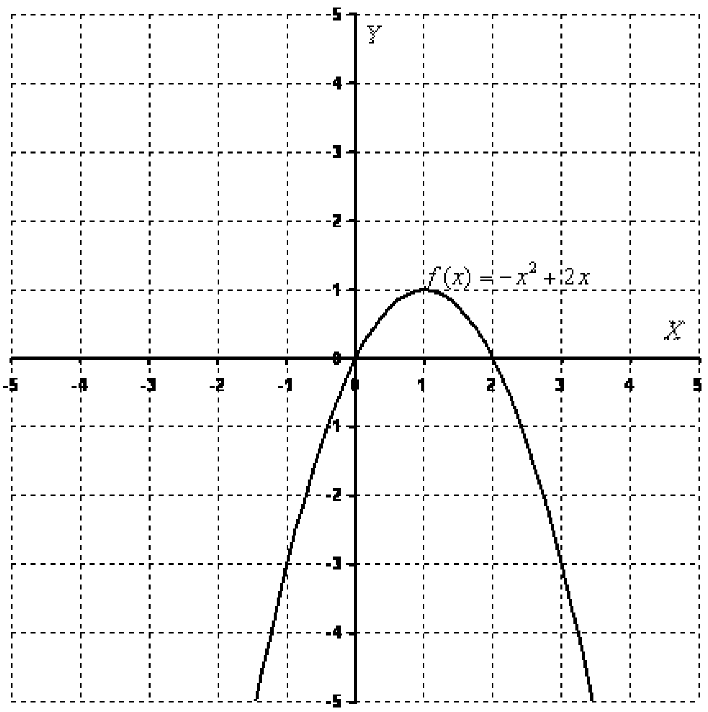
Таким образом, вершина находится в точке $(1;\, 1)$

Теперь находим другие точки, при этом пользуемся симметричностью параболы. Следует заметить, что функция $f(x) = -x^2 + 2x$ – **не является чётной**, но, тем не менее, симметричность параболы никто не отменял.

В каком порядке находить остальные точки, думаю, будет понятно из итоговой таблицы:

x	1	0	2	-1	3	-2	4
y	1	0	0	-3	-3	-8	-8

Выполним чертеж:



Из рассмотренных графиков вспоминается еще один полезный признак:

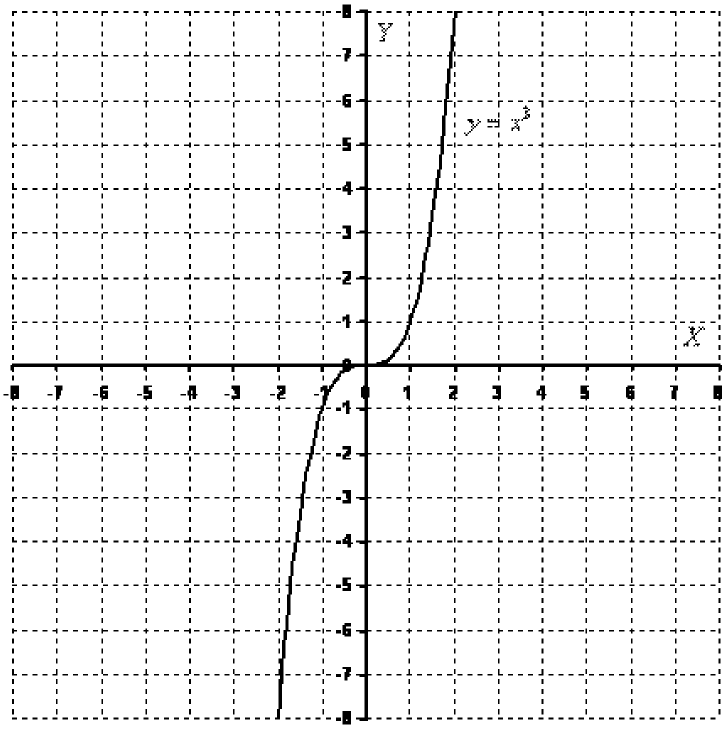
Для квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ справедливо следующее:

Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх.

Если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз.

Кубическая парабола

Кубическая парабола задается функцией $y = x^3$. Вот знакомый со школы чертеж:



Перечислим основные свойства функции $y = x^3$

Область определения – любое действительное число: $D(f) = \Re$.

Область значений – любое действительное число: $E(f) = \Re$.

Функция $y = x^3$ является **нечётной. Если функция является нечётной, то ее график симметричен относительно начала координат**. Аналитически нечётность функции выражается условием $f(-x) = -f(x)$. Выполним проверку для кубической функции, для этого вместо «икс» подставим «минус икс»: $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -(x^3) = -f(x)$, значит, функция $y = x^3$ является нечетной.

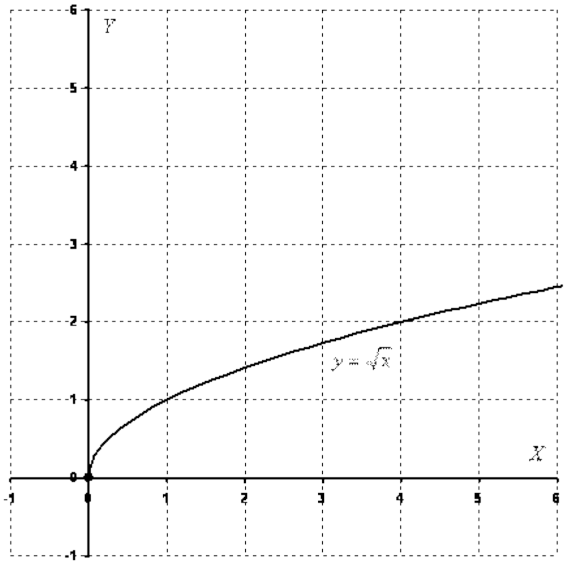
Функция $y = x^3$ **не ограничена**. Кубическую параболу тоже удобнее строить с помощью алгоритма «челнока»:

x	0	1	-1	2	-2
y	0	1	-1	8	-8

Наверняка, вы заметили, в чем ещё проявляется нечетность функции. Если мы нашли, что $f(6) = 6^3 = 216$, то при вычислении $f(-6)$ уже не нужно ничего считать, автоматом записываем, что $f(-6) = -216$. Эта особенность справедлива для любой нечетной функции.

График функции $y = \sqrt{x}$

Он представляет собой одну из ветвей **параболы**. Выполним чертеж:



Основные свойства функции $y = \sqrt{x}$:

Область определения: $D(f) = [0; +\infty)$.

Область значений: $E(f) = [0; +\infty)$.

То есть, график функции полностью находится в первой координатной четверти.

Функция $y = \sqrt{x}$ **не ограничена сверху**.

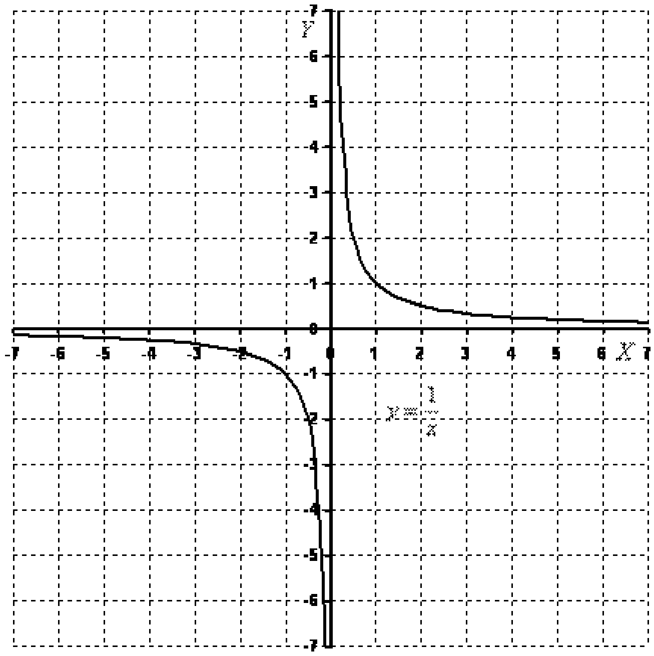
При построении простейших графиков с корнями также уместен поточечный способ построения, при этом выгодно подбирать такие значения «икс», чтобы корень извлекался нацело:

x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

График гиперболы

Опять же вспоминаем тривиальную «школьную» гиперболу $y = \dfrac{1}{x}$.

Выполним чертеж:



Основные свойства функции $y = \dfrac{1}{x}$:

Область определения: $D(f) = \Re \setminus \{0\}$.

Область значений: $E(f) = \Re \setminus \{0\}$.

Запись $\Re \setminus \{0\}$ обозначает: «любое действительное число, исключая ноль»

В точке $x = 0$ функция терпит **бесконечный разрыв**. Такая прямая (к которой бесконечно близко приближается график какой-либо функции) называется ***асимптотой***.

В данном случае ось OY является ***вертикальной асимптотой*** для графика гиперболы при $x \to 0$.

Будет ГРУБОЙ ошибкой, если при оформлении чертежа по небрежности допустить пересечение графика с асимптотой.

Гипербола **не ограничена сверху** и **не ограничена снизу**.

Исследуем функцию на бесконечности: если мы начнем уходить по оси OX влево (или вправо) на бесконечность, то «игреки» стройным шагом будут **бесконечно близко** приближаться к нулю, и, соответственно, ветви гиперболы **бесконечно близко** приближаться к оси OX.

Таким образом, ось OX является ***горизонтальной асимптотой*** для графика функции $y=\frac{1}{x}$, если «икс» стремится к плюс или минус бесконечности.

Функция $y=\frac{1}{x}$ является **нечётной**, а, значит, гипербола симметрична относительно начала координат. Данный факт очевиден из чертежа, кроме того, легко проверяется аналитически: $f(-x)=\frac{1}{(-x)}=-\frac{1}{x}=-\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$.

График функции вида $y=\frac{a}{x}$ **(**$a\neq 0$**) представляет собой две ветви гиперболы**.

Если $a>0$**, то гипербола расположена в первой и третьей координатных четвертях** (см. рисунок выше).

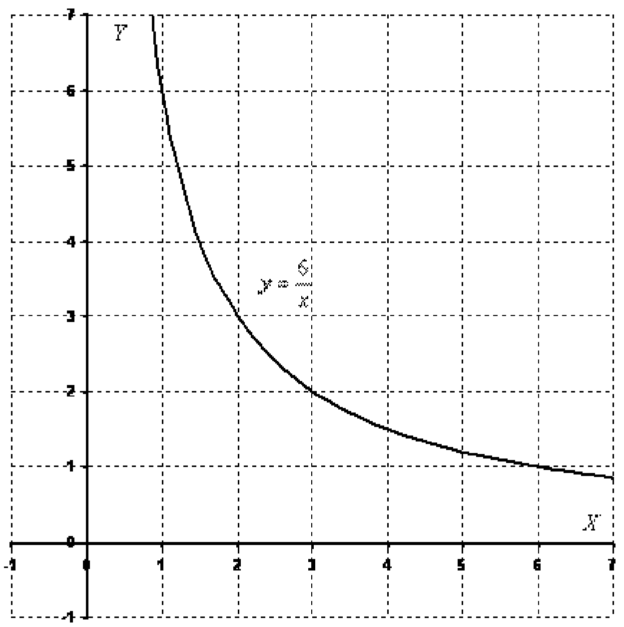
Если $a<0$**, то гипербола расположена во второй и четвертой координатных четвертях**.

Пример 3 Построить правую ветвь гиперболы $y=\frac{6}{x}$

Используем поточечный метод построения, при этом, значения x выгодно подбирать так, чтобы делилось нацело:

x	1	2	3	6
y	6	3	2	1

Выполним чертеж:



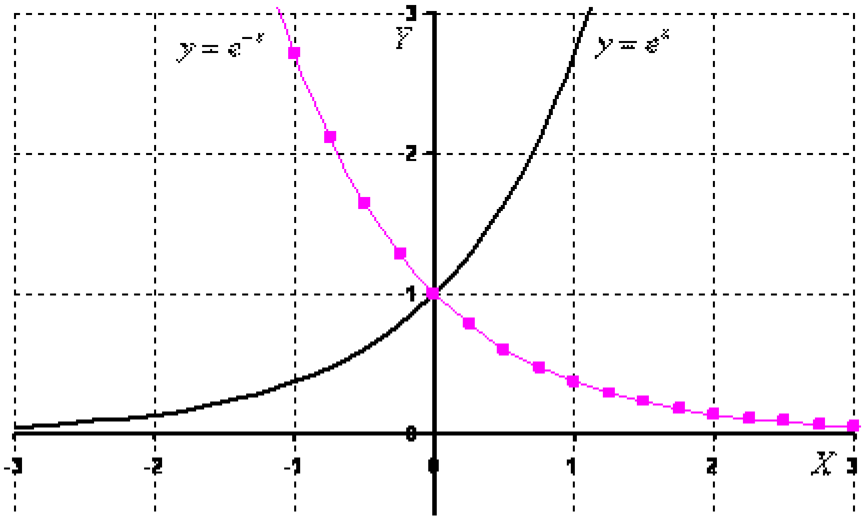
Не составит труда построить и левую ветвь гиперболы, здесь как раз поможет нечетность функции. Грубо говоря, в таблице поточечного построения мысленно добавляем к каждому числу минус, ставим соответствующие точки и прочерчиваем вторую ветвь.

График показательной функции

В данном параграфе я сразу рассмотрю экспоненциальную функцию $y = e^x$, поскольку в задачах высшей математики в 95% случаев встречается именно экспонента.

Напоминаю, что e – это иррациональное число: $e \approx 2{,}718...$, это потребуется при построении графика. Трёх точек, пожалуй, хватит:

x	-1	0	1
y	$e^{-1} \approx 0{,}37$	1	$e \approx 2{,}72$



Основные свойства функции $y = e^x$:

Область определения: $D(f) = \Re$ – любое «икс».

Область значений: $E(f) = (0; +\infty)$. Обратите внимание, что ноль не включается в область значений. Экспонента – функция **положительная**, то есть *для любого* «икс» справедливо неравенство $y = e^x > 0$, а сам график экспоненты полностью расположен в верхней полуплоскости.

Функция не ограничена сверху: то есть, если мы начнем уходить по оси OX вправо на плюс бесконечность, то соответствующие значения «игрек» стройным шагом будут тоже уходить вверх на $+\infty$ по оси OY. Кстати, график экспоненциальной функции будет «взмывать» вверх на бесконечность очень быстро и круто, уже при $x = 10$ $y = e^{10} \approx 22026{,}47$

Исследуем поведение функции на минус бесконечности. Ось OX является ***горизонтальной асимптотой*** для графика функции $y = e^x$, если $x \to -\infty$

Принципиально такой же вид имеет любая показательная функция $y = a^x$, если $a > 1$. Функции $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 10^x$ будут отличаться только крутизной наклона графика, причем, чем больше основание, тем круче будет график.

Обратите внимание, что во всех случаях графики проходят через точку $(0;1)$, так как $a^0 = 1$.

Теперь рассмотрим случай, когда основание $0 < a < 1$. Снова пример с экспонентой $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x = e^{-x}$ – на чертеже соответствующий график прочерчен малиновым цветом? Что произошло? Ничего особенного – та же самая экспонента, только она «развернулась в другую сторону»..

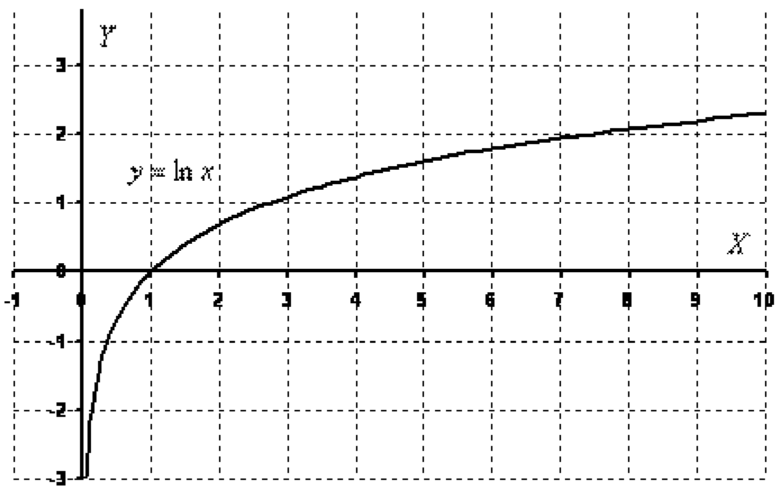
Принципиально так же выглядят графики функций $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{-x}$, $y = \left(\frac{1}{7}\right)^x = 7^{-x}$ и т. д.

Должен сказать, что второй случай встречается на практике реже, но он встречается, поэтому я счел нужным включить его в данную статью.

График логарифмической функции

Рассмотрим функцию с натуральным логарифмом $y = \ln x$. Выполним поточечный чертеж:

x	$e^{-1} \approx 0{,}37$	1	$e \approx 2{,}72$	$e^2 \approx 7{,}39$
y	-1	0	1	2



Основные свойства функции $y = \ln x$:

Область определения: $D(f) = (0;+\infty)$

Область значений: $E(f) = \Re$.

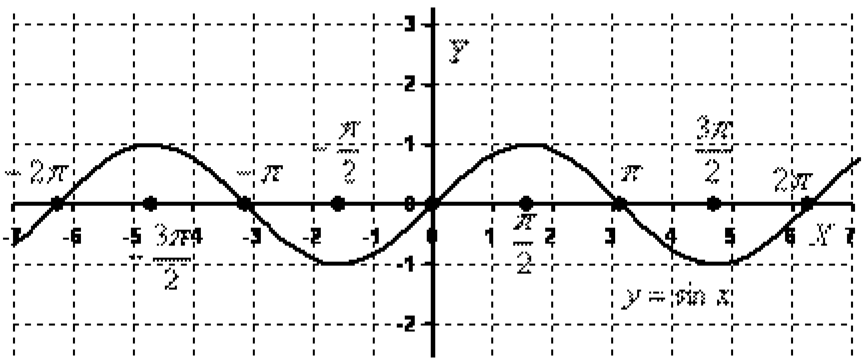
Функция не ограничена сверху, пусть и медленно, но ветка логарифма уходит вверх на бесконечность.
Исследуем поведение функции вблизи нуля справа: ось OY является ***вертикальной асимптотой*** для графика функции $y = \ln x$ при «икс» стремящемся к нулю справа.

Обязательно нужно знать и помнить типовое значение логарифма: $\log_a 1 = 0$.

Принципиально так же выглядит график логарифма при основании $a > 1$: $y = \log_2 x$, $y = \log_4 x$, $y = \lg x$ (десятичный логарифм по основанию 10) и т.д. При этом, чем больше основание, тем более пологим будет график.

Графики тригонометрических функций

Построим график функции $y = \sin x$



Данная линия называется *синусоидой*.

Напоминаю, что «пи» – это иррациональное число: $\pi \approx 3{,}14$.

Основные свойства функции $y = \sin x$:

Данная функция является **периодической** с периодом 2π. Что это значит? Посмотрим на отрезок $[0;2\pi]$. Слева и справа от него бесконечно повторяется точно такой же кусок графика.

Область определения: $D(f) = \Re$, то есть для любого значения «икс» существует значение синуса.

Область значений: $E(f) = [-1;1]$.

Функция $y = \sin x$ является **ограниченной**: $-1 \le \sin x \le 1$, то есть, все «игреки» сидят строго в отрезке $[-1;1]$.

Такого не бывает: $\sin x = 1,5$ или $\sin x = -2$, точнее говоря, бывает, но указанные уравнения не имеют решения.

Синус – это функция нечетная, синусоида симметричная относительно начала координат, и справедлив следующий факт: $\sin(-x) = -\sin x$. Таким образом, если в вычислениях встретится, например, $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, то **минус терять здесь ни в коем случае нельзя!** Он выносится: $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2}$

В практических вычислениях желательно (и даже обязательно) знать и помнить следующие значения синуса: $\sin 0 = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\sin \pi = 0$. Другие значения синуса (а также остальных тригонометрических функций) можно найти в приложении к предыдущему уроку.

График косинуса

Построим график функции $y = \cos x$

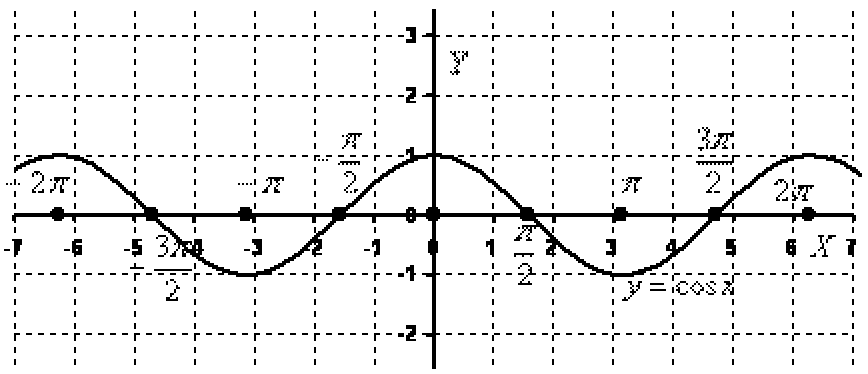


График косинуса – это та же самая синусоида, сдвинутая вдоль оси OX на $\frac{\pi}{2}$ влево

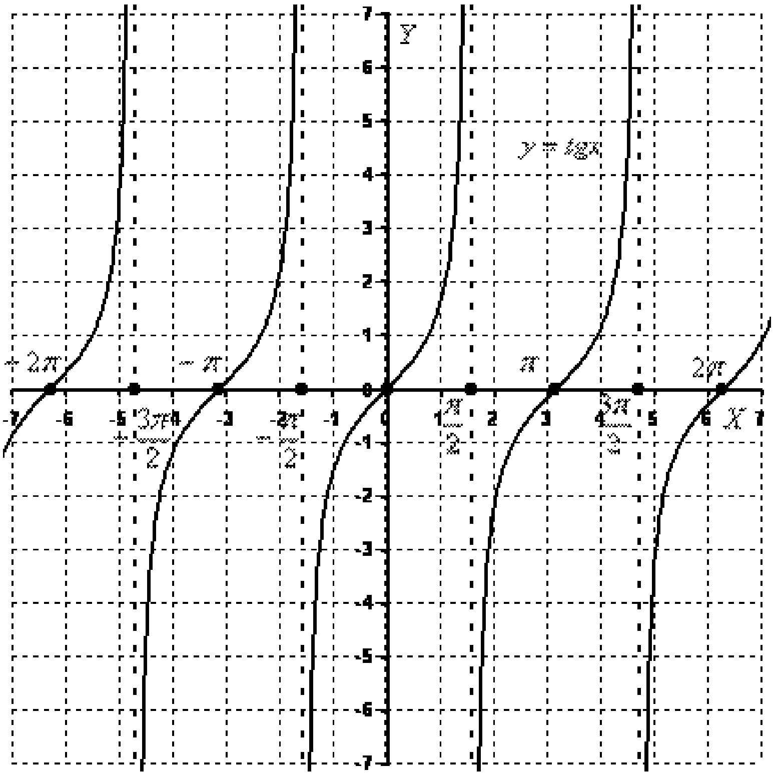
Поэтому почти все свойства синуса справедливы и для косинуса. За некоторым, но существенным исключением.

Косинус – это функция четная, ее график симметричен относительно оси OY, и справедлив следующий факт: $\cos(-x) = \cos x$. То есть, минус перед аргументом косинуса можно безболезненно убирать (или наоборот, ставить). В отличие от синуса **в косинусе минус «бесследно пропадает»**.

Для решения практических задач нужно знать и помнить следующие значения косинуса: $\cos 0 = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\cos\pi = -1$.

Графики тангенса и котангенса

Построим график функции $y = tgx$



Основные свойства функции $y = tgx$:

Данная функция является **периодической** с периодом π. То есть, достаточно рассмотреть отрезок $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, слева и справа от него ситуация будет бесконечно повторяться.

Область определения: $D(f) = \Re \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z\right\}$ – все действительные числа, кроме … $x = -\frac{3\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$ … и т. д. или коротко: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$, где k – любое целое число. (Множество целых чисел (… -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, …) в высшей математике обозначают жирной буквой **Z**.)

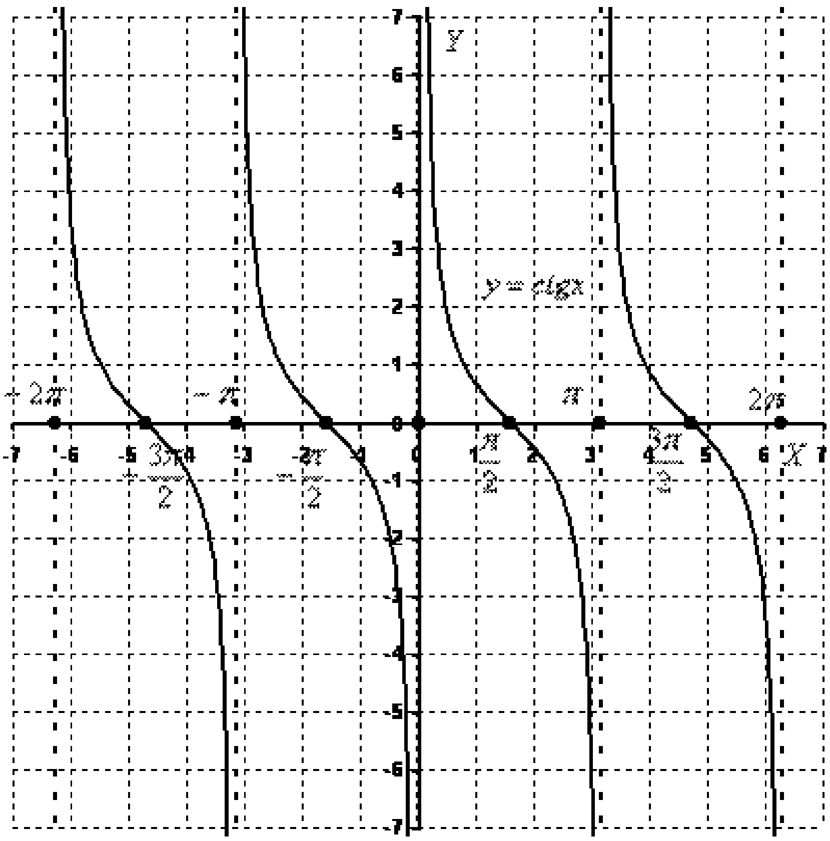
Область значений: $E(f) = \Re$. Функция $y = tgx$ **не ограничена**. Если мы приближаемся по оси OX к значению $-\frac{\pi}{2}$ **справа**, то ветка тангенса уходит на минус бесконечность, бесконечно близко приближаясь к своей асимптоте $x=-\frac{\pi}{2}$.

Если мы приближаемся по оси OX к значению $\frac{\pi}{2}$ **слева**, то «игреки» шагают вверх на плюс бесконечность, а ветка тангенса бесконечно близко приближается к асимптоте $x=\frac{\pi}{2}$.

Тангенс – функция нечетная, как и в случае с синусом, минус из-под тангенса <u>не теряется</u>, а выносится: $tg(-x)=-tgx$.

В практических вычислениях полезно помнить следующие значения тангенса: $tg0=0$, $tg\pi=0$, $tg\frac{\pi}{4}=1$, а также те точки, в которых тангенса не существует (см. график).

График котангенса – это почти тот же самый тангенс, функции связаны тригонометрическим соотношением $ctgx=\frac{1}{tgx}$. Вот его график:



Свойства попробуйте сформулировать самостоятельно, они практически такие же, как и у тангенса.