<u>Тема:</u> Скалярное произведение векторов. Угол между векторами.

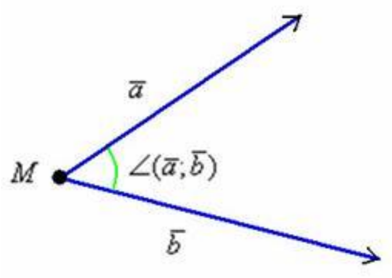
Материал прошлого урока («Векторы и действия с ними») и сегодняшнего урока изучен вами на первом курсе. Поэтому предлагаю изучить его самостоятельно.

1. Составить краткий конспект (записать определения, примеры, выполнить чертежи).

Определение скалярного произведения векторов.
Свойства скалярного произведения.

Понятие скалярного произведения

Сначала про **угол между векторами**. Рассмотрим ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отложим данные векторы от произвольной точки M:



Угол между векторами $\angle(\vec{a};\vec{b})$ может принимать значения от 0 до 180 градусов (от 0 до π радиан) включительно. Аналитически данный факт записывается в виде двойного неравенства: $0° \le \angle(\vec{a};\vec{b}) \le 180°$ либо $0 \le \angle(\vec{a};\vec{b}) \le \pi$ (в радианах).

<u>Определение:</u> Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется ЧИСЛО, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:
$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle(\vec{a};\vec{b})$

Обозначение: скалярное произведение обозначается через $\vec{a}\cdot\vec{b}$ или просто $\vec{a}\vec{b}$.

Результат операции является ЧИСЛОМ: Умножается вектор на вектор, а получается число. Действительно, если длины векторов $|\vec{a}|, |\vec{b}|$ – это числа, косинус угла – число, то их произведение $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle(\vec{a};\vec{b})$ тоже будет числом.

<u>Пример 1</u> Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$,
если $|\vec{a}| = 2, \quad |\vec{b}| = 5, \quad \angle(\vec{a};\vec{b}) = \frac{\pi}{6}$

Решение: Используем формулу $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle(\vec{a};\vec{b})$. В данном случае:
$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle(\vec{a};\vec{b}) = 2\cdot5\cdot\cos\frac{\pi}{6} = 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

Ответ: $\bar{a}\bar{b} = 5\sqrt{3}$

Значения косинуса можно найти в **тригонометрической таблице** (см в лекции от 27-28.01).

Пример 2

Найти $\bar{c}\bar{d}$, если $|\bar{c}| = 3,\quad |\bar{d}| = \sqrt{2}$, а угол между векторами равен $135°$.

$$\bar{c}\bar{d} = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot cos135^{\circ} = 3\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -3$$

Угол между векторами и значение скалярного произведения

В Примере 1 скалярное произведение получилось положительным, а в Примере 2 – отрицательным. Выясним, от чего зависит знак скалярного произведения. Смотрим на нашу формулу: $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\angle(\bar{a}; \bar{b})$. Длины ненулевых векторов всегда положительны: $|\bar{a}| > 0, |\bar{b}| > 0$, поэтому знак может зависеть только от значения косинуса.

Как уже отмечалось, угол между векторами может изменяться в пределах $0 \le \angle(\bar{a}; \bar{b}) \le \pi$, и при этом возможны следующие случаи:

1) Если **угол** между векторами **острый**: $0 < \angle(\bar{a}; \bar{b}) < \frac{\pi}{2}$ (от 0 до 90 градусов), то $\cos\angle(\bar{a}; \bar{b}) > 0$, и **скалярное произведение будет положительным**: $\bar{a}\bar{b} > 0$. Особый случай: если векторы *сонаправлены*, то угол между ними считается нулевым $\angle(\bar{a}; \bar{b}) = 0$, и скалярное произведение также будет положительным. Поскольку $\cos 0 = 1$, то формула упрощается: $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}|$.

2) Если **угол** между векторами **тупой**: $\frac{\pi}{2} < \angle(\bar{a}; \bar{b}) < \pi$ (от 90 до 180 градусов), то $\cos\angle(\bar{a}; \bar{b}) < 0$, и, соответственно, **скалярное произведение отрицательно**: $\bar{a}\bar{b} < 0$. Особый случай: если векторы *направлены противоположно*, то угол между ними считается *развёрнутым*: $\angle(\bar{a}; \bar{b}) = \pi$ (180 градусов). Скалярное произведение тоже отрицательно, так как $\cos\pi = -1$

Справедливы и обратные утверждения:

1) Если $\bar{a}\bar{b} > 0$, то угол между данными векторами острый. Как вариант, векторы сонаправлены.

2) Если $\bar{a}\bar{b} < 0$, то угол между данными векторами тупой. Как вариант, векторы направлены противоположно.

Но особый интерес представляет третий случай:

3) Если **угол** между векторами **прямой**: $\angle(\bar{a};\bar{b}) = \frac{\pi}{2}$ (90 градусов), то $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ и **скалярное произведение равно нулю**: $\bar{a}\bar{b} = 0$. Обратное тоже верно: если $\bar{a}\bar{b} = 0$, то $\angle(\bar{a};\bar{b}) = \frac{\pi}{2}$.

Скалярное произведение двух векторов равно нулю тогда и только тогда, когда данные векторы перпендикулярны.

Короткая математическая запись: $\bar{a}\bar{b} = 0 \Leftrightarrow \bar{a} \perp \bar{b}$

Для произвольных векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ и любого числа λ справедливы следующие свойства:

1) $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$ – переместительный или **коммутативный** закон скалярного произведения.

2) $(\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$ – распределительный или **дистрибутивный** закон скалярного произведения. Попросту, можно раскрывать скобки.

3) $(\lambda\bar{a}) \cdot \bar{b} = \lambda(\bar{a}\bar{b})$ – сочетательный или **ассоциативный** закон скалярного произведения. Константу можно вынести из скалярного произведения.

Скалярное произведение векторов, заданных координатами

Скалярное произведение в координатах

<u>Теорема.</u> Скалярное произведение двух векторов $\bar{a} = \{x_1; y_1; z_1\}, \bar{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$**, заданных своими координатами, равно сумме произведений их одноименных координат, то есть**

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

С помощью скалярного произведения векторов можно вычислить угол между ними.

Если заданы два ненулевых вектора своими координатами $\bar{a} = \{x_1; y_1; z_1\}, \bar{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$**, то косинус угла φ между ними:**

$\cos\varphi = \dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$, то есть

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

<u>Пример 3.</u> Найти скалярное произведение векторов $\bar{a} = \{2; -1; 4\}$ и $\bar{b} = \{-3; 5; -2\}$ и угол между ними.

Решение: $\bar{a}\ \cdot\ \bar{b}\ = 2\cdot(-3) + (-1)\cdot 5 + 4\cdot(-2) = -6 - 5 - 8 = -19$

$$cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$= \frac{2\cdot(-3) + (-1)\cdot 5 + 4\cdot(-2)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2}\cdot\sqrt{(-3)^2 + 5^2 + (-2)^2}} = \frac{-19}{\sqrt{19}\cdot\sqrt{38}} =$$

$$= \frac{-19}{\sqrt{19}\cdot\sqrt{2\cdot 19}} = \frac{-19}{19\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

<u>Пример 4.</u>

Найти скалярное произведение векторов:

а) $\bar{a}(2; -5)$ и $\bar{b}(-1; 0)$

б) $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, если даны точки $A(1; -1; 3), B(0; 1; -2), C(4; -4; 0)$

Решение:

а) Здесь даны векторы плоскости.

По формуле :

$$\boldsymbol{\bar{a}\cdot\bar{b} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2}$$

$\bar{a}\bar{b} = 2\cdot(-1) + (-5)\cdot 0 = -2 + 0 = -2$

К слову: скалярное произведение получилось отрицательным, значит, угол между данными векторами является тупым.

б) А тут речь идёт о точках и векторах пространства. Сначала найдём векторы:

$\overline{AB}(0-1; 1-(-1); -2-3) = \overline{AB}(-1; 2; -5)$

$\overline{AC}(4-1; -4-(-1); 0-3) = \overline{AC}(3; -3; -3)$

По формуле $\boldsymbol{\bar{a}\cdot\bar{b} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2}$

вычислим скалярное произведение:

$\overline{AB}\cdot\overline{AC} = -1\cdot 3 + 2\cdot(-3) + (-5)\cdot(-3) = -3 - 6 + 15 = 6$

К слову: скалярное произведение положительно, значит, угол между пространственными векторами $\overline{AB}, \overline{AC}$ является острым.

Проверка векторов на перпендикулярность с помощью скалярного произведения

Условие перпендикулярности ненулевых векторов:

Два вектора пространства $\bar{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\bar{b} = (x_2; y_2; z_2)$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда .

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Пример 5

а) Проверить перпендикулярность векторов: $\bar{a}(1;\ 2;\ -4)$ и $\bar{b}(6;\ -1;\ 1)$

б) Выяснить, будут ли перпендикулярными отрезки KL и MN, если $K(3;\ 5),\ L(-2;\ 0),\ M(8;\ -1),\ N(1;\ 4)$

Решение:
а) Выясним, будут ли ортогональны пространственные векторы. Вычислим их скалярное произведение:
$\bar{a}\bar{b} = 1\cdot 6 + 2\cdot(-1) + (-4)\cdot 1 = 6 - 2 - 4 = 0$, следовательно, $\bar{a} \perp \bar{b}$

б) Здесь речь идёт об **обычных отрезках** плоскости. Речь идёт об обычных отрезках, а задача всё равно решается через векторы. Найдём векторы:
$\overline{KL}(-2-3;\ 0-5) = \overline{KL}(-5;\ -5)$
$\overline{MN}(1-8;\ 4-(-1)) = \overline{MN}(-7;\ 5)$

Вычислим их скалярное произведение:
$\overline{KL}\cdot\overline{MN} = -5\cdot(-7) + (-5)\cdot 5 = 35 - 25 = 10 \neq 0$, значит, отрезки KL и MN не перпендикулярны.

Пример 6

При каком значении λ векторы $\bar{a}(3;\ \lambda;\ -2),\ \bar{b}(2-\lambda;\ -1;\ 5)$ будут перпендикулярны?

Решение: По условию требуется найти **такое** значение параметра λ, чтобы данные векторы были перпендикулярны.

Два вектора пространства $\bar{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\bar{b} = (x_2; y_2; z_2)$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда .

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Составим уравнение:

$$\bar{a}\bar{b} = 0$$
$$3\cdot(2-\lambda) + \lambda\cdot(-1) + (-2)\cdot 5 = 0$$

Раскрываем скобки и приводим подобные слагаемые:
$6-3\lambda-\lambda-10=0$
$-4\lambda-4=0$

Решаем простейшее линейное уравнение:
$-4\lambda=4$
$\lambda=-1$

Ответ: при $\lambda=-1$

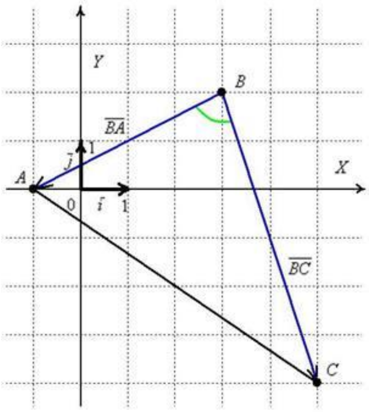
В рассмотренной задаче легко выполнить проверку, в исходные векторы $\overline{a}(3;\ \lambda;\ -2),\ \overline{b}(2-\lambda;\ -1;\ 5)$ подставляем полученное значение параметра $\lambda=-1$:
$\overline{a}(3;\ -1;\ -2),\ \overline{b}(3;\ -1;\ 5)$

И находим скалярное произведение:
$\overline{a}\overline{b}=3\cdot3-1\cdot(-1)-2\cdot5=9+1-10=0$ – да, действительно,
при $\lambda=-1$ векторы $\overline{a},\overline{b}$ перпендикулярны, что и требовалось проверить.

<u>Пример 7</u>

Даны три вершины треугольника $A(-1;\ 0),\ B(3;\ 2),\ C(5;\ -4)$. Найти $\angle ABC$ (угол при вершине B).

Решение: По условию чертёж выполнять не требуется, но всё-таки:



Требуемый угол $\angle ABC$ помечен зелёной дугой. Сразу вспоминаем школьное обозначение угла: $\angle ABC$ – особое внимание на **среднюю** букву B – это и есть нужная нам вершина угла. Для краткости можно было также записать просто $\angle B$.

Из чертежа совершенно очевидно, что угол $\angle ABC$ треугольника совпадает с углом между векторами $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$, иными словами: $\angle ABC=\angle(\overline{BA};\ \overline{BC})$.

Найдём векторы:

$\overline{BA}(-1-3;\ 0-2)=\overline{BA}(-4;\ -2)$

$\overline{BC}(5-3;\ -4-2)=\overline{BC}(2;\ -6)$

Вычислим скалярное произведение:

$\overline{BA}\cdot\overline{BC}=-4\cdot2-2\cdot(-6)=-8+12=4$

И длины векторов:

$|\overline{BA}|=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$|\overline{BC}|=\sqrt{2^2+(-6)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

Косинус угла:

$$\cos\angle(\overline{BA};\ \overline{BC})=\frac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{|\overline{BA}|\cdot|\overline{BC}|}=\frac{4}{2\sqrt{5}\cdot2\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{50}}=\frac{1}{5\sqrt{2}}$$

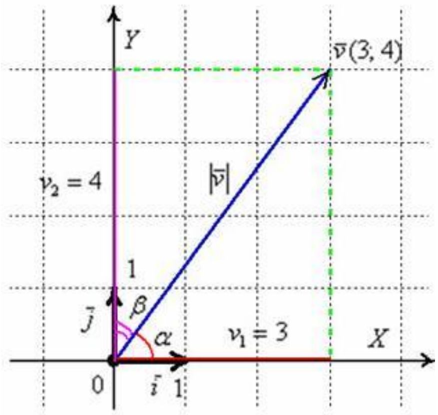
Найдём сам угол (посчитайте на калькуляторе):

$$\angle(\overline{BA};\ \overline{BC})=\arccos\frac{1}{5\sqrt{2}}\approx1{,}43\text{ рад.}\approx82^\circ$$

Ответ: $\angle ABC=\arccos\dfrac{1}{5\sqrt{2}}\approx1{,}43\text{ рад.}\approx82^\circ$

Проекции вектора на координатные оси. Направляющие косинусы вектора

Рассмотрим вектор плоскости $\bar{v}(3;4)$, заданный своими координатами в ортонормированном базисе $(\bar{i};\bar{j})$. Для удобства отложим его от начала координат:



Проекцией вектора $\bar{v}$ на координатную ось OX является в точности его первая координата: $v_1=3$ (красная черта). Обозначим через α угол между вектором $\bar{v}$ и координатным вектором $\bar{i}$: $\alpha=\angle(\bar{v};\bar{i})$ (красная дуга). Тогда:

$\cos\alpha = \frac{v_1}{|\bar{v}|} = \frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{3}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$ (определение косинуса в прямоугольном треугольнике недавно упоминалось).

Аналогично со второй координатой: проекцией вектора $\bar{v}$ на координатную ось OY является его вторая координата: $v_2 = 4$ (малиновая черта). Обозначим через β угол между вектором $\bar{v}$ и координатным вектором $\bar{j}$: $\beta = \angle(\bar{v};\bar{j})$ (двойная малиновая дуга).

Тогда: $\cos\beta = \frac{v_2}{|\bar{v}|} = \frac{4}{5}$

Косинусы $\cos\alpha, \cos\beta$ называются **направляющими косинусами** вектора.

С пространственными векторами, заданными в ортонормированном базисе $(\bar{i};\bar{j};\bar{k})$ рассуждения точно такие же. Рассмотрим произвольный ненулевой вектор $\bar{v}(v_1;v_2;v_3)$. Его координаты представляют собой проекции вектора на оси OX, OY, OZ соответственно. Обозначим углы данного вектора с ортами через: $\alpha = \angle(\bar{v};\bar{i}),\ \beta = \angle(\bar{v};\bar{j}),\ \gamma = \angle(\bar{v};\bar{k})$. Тогда **направляющие косинусы вектора выражаются формулами**: $\cos\alpha = \frac{v_1}{|\bar{v}|}, \cos\beta = \frac{v_2}{|\bar{v}|}, \cos\gamma = \frac{v_3}{|\bar{v}|}$,

1. Выполнить практическую работу (по вариантам):

1 вариант

1.Даны точки E(4;12; -1), F(-4;-10;2), G(-2;6; 5), H(4;-2; 6). Найти:
а) координаты векторов $\bar{a}$ =EF, $\bar{b}$ =GH
б) длину вектора $\bar{a}$
в) найти сумму, разность векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, произведение вектора a на число 4.
г) найти скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и угол между ними.

2 вариант

1.Даны точки A(-2;4; 1), B(4;-2;3), C(-8;-14; 2), D(6;8;-3). Найти:
а) координаты векторов $\bar{a}$ =AB, $\bar{b}$ =CD
б) длину вектора $\bar{a}$
в) найти сумму, разность векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, произведение вектора a на число 4.
г) найти скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и угол между ними.

3 вариант

1. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, если A(3; 4; -2) и B(4; 1; 5).
2. Даны координаты точек A(-3; 2; 1), B(2; -1; -3), C(1; -4; 3), D(-1; 2; -2). Найдите длину вектора $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CD}$.
3. Даны координаты точек C(3; -2; 1), D(-1; 2; 1), M(2; -3; 3), N(-1; 1; -2). Найдите косинус угла между векторами CD и MN.
4. При каком значении k векторы $\bar{a}$(6-k; k; 2) и $\bar{b}$(-3; 5+5k; -9) перпендикулярны.

4 вариант

1. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$, если A(1; -3; 2) и B(0; 2; 7).
2. Даны координаты точек C(-4; -3; -1), D(-1; -2; 3), M(2; -1; -2), N(0; 1; -3). Найдите $3\overrightarrow{CD} - 2\overrightarrow{MN}$
3. Даны координаты точек A(1; -1; -4), B(-3; -1; 0), C(-1;2; 5), D(2; -3; 1). Найдите косинус угла между векторами AB и CD.
4. При каком значении m векторы $\bar{a}$(4; m-1; m) и $\bar{b}$(-2; 4; 3 -m) перпендикулярны.

1 вариант	Баганов К., Бублик В., Киселев А., Филиппова К., Ипполитов Е., Крайнов А.
2 вариант	Козлов М., Мехоношина В., Силантьев К., Фатуллаев Р., Осипов А., Молодцова А.
3 вариант	Мухин М., Федотов Н., Тюленев Д., Штанько А.
4 вариант	Щекоткин Д., Царев Н., Князев А., Нестеров А.

Все практические работы выполнять на отдельных листках (оформлять аккуратно, разборчивым почерком) сфотографировать и отправить на электронную почту: olga.georg.gor@yandex.ru