<u>Тема:</u> Обратная матрица. Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы.

1. **Данный материал (рассчитан на 4 часа) является дополнительным к темам «Матрицы», «Определители», «Системы линейных уравнений». Попробуйте изучить его самостоятельно.**

I. Обратная матрица

Что такое обратная матрица? Здесь можно провести аналогию с обратными числами: рассмотрим, например, число 5 и обратное ему число $\frac{1}{5} = 5^{-1}$. Произведение данных чисел равно единице: $5 \cdot 5^{-1} = 1$. С матрицами всё похоже! Произведение матрицы A на обратную ей матрицу A^{-1} равно $A \cdot A^{-1} = E$ – *единичной матрице*.

Что необходимо знать и уметь для нахождения обратной матрицы? Вы должны уметь решать **определители**. Вы должны понимать, что такое **матрица** и уметь выполнять некоторые действия с ними.

Рассмотрим **квадратную** матрицу A. **Обратную матрицу A^{-1} можно найти по следующей формуле**:

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A_*^T$, где $|A|$ – определитель матрицы A, A_*^T – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A.

Понятие обратной матрицы существует только для квадратных матриц, матриц «два на два», «три на три» и т.д.

Обозначения: Обратная матрица обозначается надстрочным индексом $^{-1}$

Начнем с простейшего случая – матрицы «два на два».

<u>Пример:</u>

Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Последовательность действий удобно разложить по пунктам.

1) Сначала находим определитель матрицы.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$$

В том случае, если определитель матрицы равен **НУЛЮ** – обратной матрицы **НЕ СУЩЕСТВУЕТ**.

В рассматриваемом примере, как выяснилось, $|A| = -2 \neq 0$, а значит, всё в порядке.

2) Находим матрицу миноров M.

Матрица миноров имеет такие же размеры, как и матрица A, то есть в данном случае $M = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}$.

Осталось найти четыре числа и поставить их вместо звездочек.

Возвращаемся к нашей матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Сначала рассмотрим левый верхний элемент:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Как найти его **минор**?

А делается это так: МЫСЛЕННО вычеркиваем строку и столбец, в котором находится данный элемент:

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{3} & 4 \end{pmatrix}$$

Оставшееся число и является **минором данного элемента**, которое записываем в нашу матрицу миноров:

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{3} & \boxed{4} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

Рассматриваем следующий элемент матрицы A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Мысленно вычеркиваем строку и столбец, в котором стоит данный элемент:

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} \\ 3 & \cancel{4} \end{pmatrix}$$

То, что осталось, и есть минор данного элемента, который записываем в нашу матрицу:

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} \\ \boxed{3} & \cancel{4} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ * & * \end{pmatrix}$$

Аналогично рассматриваем элементы второй строки и находим их миноры:

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Готово.

$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица миноров соответствующих элементов матрицы A.

3) Находим матрицу алгебраических дополнений A_* .

Это просто. В матрице миноров нужно **ПОМЕНЯТЬ ЗНАКИ** у двух чисел:

$$M = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

Именно у этих чисел, которые обведены в кружок!

$A_* = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A .

4) Находим транспонированную матрицу алгебраических дополнений A_*^T .

Для того чтобы транспонировать матрицу, нужно ее строки записать в столбцы транспонированной матрицы.

$A_*^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A .

5) Ответ.

Вспоминаем нашу формулу $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A_*^T$

Таким образом, обратная матрица:

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ лучше оставить в таком виде. **НЕ НУЖНО** делить каждый элемент матрицы на 2, так как получатся дробные числа.

Как проверить решение?

Необходимо выполнить матричное умножение AA^{-1} либо $A^{-1}A$

Проверка:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1\cdot 4 + 2\cdot(-3) & 1\cdot(-2) + 2\cdot 1 \\ 3\cdot 4 + 4\cdot(-3) & 3\cdot(-2) + 4\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Получена **единичная матрица** – это матрица с единицами на *главной диагонали* и нулями в остальных местах.

Таким образом, обратная матрица найдена правильно.

Переходим к более распространенному на практике случаю – матрице «три на три»:

Пример:

Найти обратную матрицу для матрицы $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

Алгоритм точно такой же, как и для случая «два на два».

Обратную матрицу найдем по формуле: $B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot B_*^T$, где B_*^T – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы B.

1) Находим определитель матрицы.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -1$$

Метод вычисления определителя третьего порядка смотрите в уроке по теме «Определители».

Также не забываем, что $|B| = -1 \neq 0$, а значит, всё нормально – **обратная матрица существует**.

2) Находим матрицу миноров M.

Матрица миноров имеет размерность «три на три» $M = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$, и нам нужно найти девять чисел.

Подробно рассмотрим минор M_{11}:

Рассмотрим следующий элемент матрицы:

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

МЫСЛЕННО вычеркиваем строку и столбец, в котором находится данный элемент:

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Оставшиеся четыре числа записываем в определитель «два на два»

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$$

Этот определитель «два на два» и **является минором данного элемента**. Его нужно вычислить:

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 3\cdot(-3)-(-2)\cdot 4=-9+8=-1$$

Всё, минор найден, записываем его в нашу матрицу миноров:

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 3\cdot(-3)-(-2)\cdot 4=-9+8=-1$$

$$M=\begin{pmatrix} -1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \mathrm{M}_{12}=\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 6\cdot(-3)-5\cdot 4=-38$$

Как вы, наверное, догадались, необходимо вычислить еще восемь определителей «два на два».

$$\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{M}_{12}=\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 6\cdot(-3)-5\cdot 4=-38$$

$$\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{M}_{13}=\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 6\cdot(-2)-5\cdot 3=-27$$

$$\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{M}_{21}=\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 5\cdot(-3)-(-2)\cdot 7=-1$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) - 5 \cdot 7 = -41$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 5 \cdot 5 = -29$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad M_{31} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 3 \cdot 7 = -1$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 6 \cdot 7 = -34$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 6 \cdot 5 = -24$$

Окончательный результат: – матрица миноров соответствующих элементов матрицы B.

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -38 & -27 \\ -1 & -41 & -29 \\ -1 & -34 & -24 \end{pmatrix}$$

То, что все миноры получились отрицательными – чистая случайность.

3) Находим матрицу алгебраических дополнений B_*.

В матрице миноров необходимо **СМЕНИТЬ ЗНАКИ** строго у следующих элементов:

$$M = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

В данном случае:

$$B_* = \begin{pmatrix} -1 & 38 & -27 \\ 1 & -41 & 29 \\ -1 & 34 & -24 \end{pmatrix}$$ – матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы B.

4) Находим транспонированную матрицу алгебраических дополнений B_*^T.

$$B_*^T=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 38 & -41 & 34\\ -27 & 29 & -24\end{pmatrix}$$ – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы B.

5) Ответ:

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}\cdot B_*^T=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 38 & -41 & 34\\ -27 & 29 & -24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -38 & 41 & -34\\ 27 & -29 & 24\end{pmatrix}$$

Проверка:

$$BB^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -38 & 41 & -34\\ 27 & -29 & 24\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot 1+5\cdot(-38)+7\cdot 27 & 2\cdot(-1)+5\cdot 41+7\cdot(-29) & 2\cdot 1+5\cdot(-34)+7\cdot 24\\ 6\cdot 1+3\cdot(-38)+4\cdot 27 & 6\cdot(-1)+3\cdot 41+4\cdot(-29) & 6\cdot 1+3\cdot(-34)+4\cdot 24\\ 5\cdot 1-2\cdot(-38)-3\cdot 27 & 5\cdot(-1)-2\cdot 41-3\cdot(-29) & 5\cdot 1-2\cdot(-34)-3\cdot 24\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E$$

Таким образом, обратная матрица найдена правильно.

II. Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы.

Решить систему матричным методом

$$\begin{cases}3x_1-2x_2+4x_3=21\\ 3x_1+4x_2-2x_3=9\\ 2x_1-x_2-x_3=10\end{cases}$$

Решение: Запишем систему в матричной форме: $AX=b$

где $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 4\\ 3 & 4 & -2\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}21\\ 9\\ 10\end{pmatrix}$

Пожалуйста, посмотрите на систему уравнений и на матрицы. По какому принципу записываем элементы в матрицы, думаю, всем понятно. Единственный комментарий:

если бы в уравнениях отсутствовали некоторые переменные, то на соответствующих местах в матрице A нужно было бы поставить нули.

Решение системы найдем по формуле $X = A^{-1}b$ /

Согласно формуле нам нужно найти обратную матрицу A^{-1} и выполнить матричное умножение $A^{-1}b$. Алгоритм нахождения обратной матрицы подробно разобран в предыдущем пункте.

Обратную матрицу найдем по формуле:

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A_*^T$, где A_*^T – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A.

Сначала разбираемся с определителем:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-4-2) + 2 \cdot (-3+4) + 4 \cdot (-3-8) = -18 + 2 - 44 = -60$$

Здесь определитель раскрыт по первой строке.

Теперь нужно вычислить 9 миноров и записать их в матрицу миноров $M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}$

Справка: Полезно знать смысл двойных подстрочных индексов в линейной алгебре. Первая цифра – это номер строки, в которой находится данный элемент. Вторая цифра – это номер столбца, в котором находится данный элемент:

То есть, двойной подстрочный индекс указывает, что элемент M_{13} находится в первой строке, третьем столбце, а, например, элемент M_{32} находится в 3 строке, 2 столбце

В ходе решения расчет миноров лучше расписать подробно.

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 2 = -6$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1$$

$$M_{13}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-3-8=-11$$

$$M_{21}=\begin{vmatrix}-2 & 4\\ -1 & -1\end{vmatrix}=2+4=6$$

$$M_{22}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-3-8=-11$$

$$M_{23}=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-3+4=1$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 4 & -2\end{vmatrix}=4-16=-12$$

$$M_{32}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-6-12=-18$$

$$M_{33}=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=12+6=18$$

Порядок расчета миноров совершенно не важен, здесь они вычислены слева направо по строкам.

Таким образом: $\mathrm{M}=\begin{pmatrix}-6 & 1 & -11\\ 6 & -11 & 1\\ -12 & -18 & 18\end{pmatrix}$

– матрица миноров соответствующих элементов матрицы A.

У выделенных элементов матрицы миноров нужно поменять знаки.

$$A_* =\begin{pmatrix}-6 & -1 & -11\\ -6 & -11 & -1\\ -12 & 18 & 18\end{pmatrix}$$ – матрица алгебраических дополнений.

$$A_*^T =\begin{pmatrix}-6 & -6 & -12\\ -1 & -11 & 18\\ -11 & -1 & 18\end{pmatrix}$$ – транспонированная матрица алгебраических дополнений.

Теперь записываем обратную матрицу:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A_*^T=\frac{1}{-60}\begin{pmatrix}-6 & -6 & -12\\ -1 & -11 & 18\\ -11 & -1 & 18\end{pmatrix}=\frac{1}{60}\begin{pmatrix}6 & 6 & 12\\ 1 & 11 & -18\\ 11 & 1 & -18\end{pmatrix}$$

Ни в коем случае не вносим $\frac{1}{60}$ в матрицу, это серьезно затруднит дальнейшие вычисления. Деление нужно было бы выполнить, если бы все числа матрицы делились на 60 без остатка. А вот внести минус в матрицу в данном случае очень даже нужно, это, наоборот – упростит дальнейшие вычисления.

Осталось провести матричное умножение (как умножать матрицы, повторите в лекции «Матрицы»).

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}b = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 6 & 6 & 12 \\ 1 & 11 & -18 \\ 11 & 1 & -18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 6 \cdot 21 + 6 \cdot 9 + 12 \cdot 10 \\ 1 \cdot 21 + 11 \cdot 9 - 18 \cdot 10 \\ 11 \cdot 21 + 1 \cdot 9 - 18 \cdot 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 300 \\ -60 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Обратите внимание, что деление на 60 выполняется **в последнюю очередь**.
Ответ: $x_1 = 5,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1$

2. **Решить систему с помощью обратной матрицы (в рабочих тетрадях).**

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ 2x + y - 4z = 9 \\ 6x - 5y + 2z = 17 \end{cases}$$