<u>Тема:</u> Определители.

1. **Прослушайте звуковой файл https://yadi.sk/d/rlFFelDgozCe6g , одновременно читая лекцию.**
2. **Составить краткий конспект (записать определения, примеры).**

В ходе решения задач по высшей математике очень часто возникает необходимость **вычислить определитель матрицы**. Определитель матрицы фигурирует в линейной алгебре, аналитической геометрии, математическом анализе и других разделах высшей математики. Таким образом, без навыка решения определителей просто не обойтись.

Определитель можно вычислить только для квадратной матрицы

Пусть дана квадратная таблица, состоящая из чисел, расположенных в n строках (горизонтальных рядах) и в n столбцах (вертикальных рядах). (Посмотрите лекцию о матрицах). С помощью этих чисел по некоторым правилам, которые мы изучим ниже, находят число, которое и называют ***определителем n*-го** порядка и обозначают следующим образом:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

Определители также принято обозначать греческой буквой Δ.

Числа a_{ij} называют *элементами* определителя (1) (первый индекс означает номер строки, второй – номер столбца, на пересечении которых стоит элемент; $i = 1, 2, ..., n;\ j = 1, 2, ..., n$). Порядок определителя – это число его строк и столбцов.

Воображаемая прямая, соединяющая элементы определителя, у которых оба индекса одинаковы, т.е. элементы

$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, называется *главной диагональю*, другая диагональ – *вспомогательной*.

На практике чаще всего можно встретить определитель второго порядка,

например: $|A| = \begin{vmatrix} 11 & -3 \\ -15 & -2 \end{vmatrix} = ?$, и определитель третьего порядка,

например: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = ?$.

определитель четвертого порядка $D = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} = ?$

Что значит решить (найти, раскрыть) определитель? Вычислить определитель – это значит **НАЙТИ ЧИСЛО**. Знаки вопроса $?$ в вышерассмотренных примерах – это совершенно обыкновенные числа.

Покажем, как вычисляются определители первых трёх порядков.

Определитель первого порядка – это сам элемент a_{11} т.е.

$|a_{11}| = a_{11}$.

Определитель второго порядка есть число, получаемое следующим образом:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad (2)$$

где $a_{11}a_{22}$ и $a_{12}a_{21}$

- произведение элементов, стоящих соответственно на главной и на побочной диагоналях.

Равенство (2) показывает, что со своим знаком берётся произведение элементов главной диагонали, а с противоположным – произведение элементов вспомогательной диагонали.

Пример 1. Вычислить определители второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 11 & -3 \\ -15 & -2 \end{vmatrix}$$

Решение. По формуле (2) находим:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \bullet 1 - 4 \bullet (-2) = 11;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \bullet 4 - 2 \bullet 2 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 11 & -3 \\ -15 & -2 \end{vmatrix} = 11 \cdot (-2) - (-15) \cdot (-3) = -22 - 45 = -67$$

Определитель третьего порядка – это число, получаемое так:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \qquad (3)$$

Запомнить эту формулу трудно. Однако существует простое правило, называемое ***правилом треугольников***, которое позволяет легко воспроизвести выражение (3). Обозначая элементы определителя точками, соединим отрезками прямой те из них, которые дают произведения элементов определителя (рис. 1).

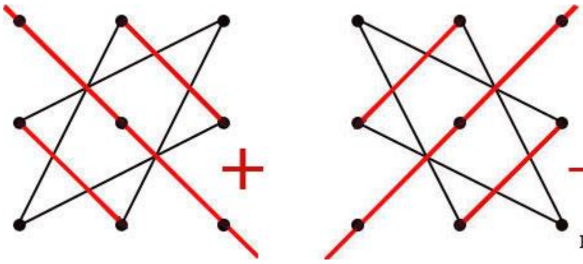


Рис. 1

Формула (3) показывает, что со своими знаками берутся произведения элементов главной диагонали, а также элементов, расположенных в вершинах двух треугольников, основания которых ей параллельны; с противоположными – произведения элементов вспомогательной диагонали, а также элементов, расположенных в вершинах двух треугольников, которые ей параллельны.

Пример 2. Вычислить определители третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}. \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

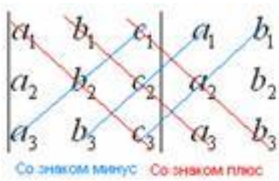
Решение. Пользуясь правилом треугольников, получим

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} == 0\cdot 2\cdot 4 + 1\cdot 3\cdot 2 + (-1)\cdot 3\cdot(-2) - 2\cdot 2\cdot(-2) - (-1)\cdot 1\cdot 4 - 3\cdot 3\cdot 0 = 24$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 6\cdot 1 + 2\cdot 5\cdot 2 + 4\cdot(-1)\cdot(-3) - (2\cdot 6\cdot(-3) + 5\cdot(-1)\cdot 1 + 2\cdot 4\cdot 1) = 71$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot 9 + (-7)\cdot(-2)\cdot 6 + 4\cdot 8\cdot 3 - (-7)\cdot 0\cdot 3 - 1\cdot 8\cdot 6 - 4\cdot(-2)\cdot 9 =$$
$$= 0 + 84 + 96 - 0 - 48 + 72 = 204$$

Формула длинная и допустить ошибку по невнимательности проще простого. Как избежать досадных промахов? Для этого придуман второй способ вычисления определителя, который фактически совпадает с первым. Называется он способом Саррюса или способом «параллельных полосок». Суть состоит в том, что справа от определителя приписывают первый и второй столбец и аккуратно карандашом проводят линии:



Множители, находящиеся на «красных» диагоналях входят в формулу со знаком «плюс».

Множители, находящиеся на «синих» диагоналях входят в формулу со знаком минус:

Пример 3:

$$\left|\begin{matrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \\ -7 & 8 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot 9 + (-2)\cdot 6\cdot(-7) + 3\cdot 4\cdot 8 - 3\cdot 0\cdot(-7) - 1\cdot 6\cdot 8 - (-2)\cdot 4\cdot 9 =$$
$$= 0 + 84 + 96 - 0 - 48 + 72 = 204$$

Сравните два решения. Нетрудно заметить, что это ОДНО И ТО ЖЕ, просто во втором случае немного переставлены множители формулы, и, самое главное, вероятность допустить ошибку значительно меньше.

Далее материал в красных скобках необязателен для изучения!

Определители более высоких порядков.

Для того чтобы вычислять определители более высокого порядка, потребуются некоторые дополнительные понятия. Рассмотрим квадратную матрицу n-го порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

Определение. ***Минором Mij элемента aij*** матрицы n-го порядка называется определитель матрицы $(n-1)$-го порядка, полученной из матрицы A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, содержащего этот элемент.

Например, минором элемента a_{12} матрицы A третьего порядка будет:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot a_{33} - a_{31} \cdot a_{23}$$

Определение. ***Алгебраическим дополнением Aij элемента aij*** матрицы n-го порядка называется его ***минор***, взятый со знаком плюс, если сумма индексов элемента a_{ij} является чётным числом, и взятый со знаком минус, если сумма индексов элемента a_{ij} является нечётным числом, т. е. $\boldsymbol{A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}}$

Таким образом, алгебраическое дополнение совпадает с минором, когда сумма номеров строки и столбца $(i + j)$ – чётное число, и отличается от минора знаком, когда $(i + j)$ – нечётное число.

Следующая теорема позволяет вычислять определители порядка больше трёх.

Теорема Лапласа. Определитель квадратной матрицы n-го порядка равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Пример. Вычислить определитель матрицы: $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Раскладывая определитель по первому столбцу, получаем:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{41} = 5 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+0 + 0 + 0 = 5 \cdot (-1 \cdot 3 \cdot 1) = -15$$

Значение теоремы Лапласа состоит в том, что позволяет свести вычисление определителей n-го порядка к вычислению определителей $(n-1)$-го порядка

Основные свойства определителей квадратных матриц.

1. Если поменять местами строки и столбцы, то определитель матрицы не изменится. Это свойство называется свойством равноправности строк и столбцов.
2. При перестановке двух строк (столбцов) матрицы её определитель меняет знак на противоположный.
3. Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число, то её определитель умножится на это число.

Замечание. За знак определителя можно выносить общий множитель любой строки или столбца.

4. Определитель равен нулю, если он:

а) содержит нулевую строку (столбец);

б) имеет две строки (столбца) с пропорциональными элементами;

в) содержит две одинаковые строки (столбца).

5. Определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), предварительно умноженные на одно и то же число.

Пример. Вычислить определитель четвертого порядка: $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}$

Преобразуем определитель так, чтобы в 3-й строке все элементы, кроме одного, обращались в 0. Для этого умножим, например, элементы 3-го столбца на (–4) и на 2 и прибавим их соответственно к элементам 1-го и 2-го столбцов. Раскладывая полученный определитель по элементам третьей строки, найдем:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 2 & -2 & 4 \\ 13 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & 12 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 13 & -4 & 1 \\ -10 & 12 & 6 \end{vmatrix}$$

«Обнулим» в матрице третьего порядка элементы 2-й строки (кроме одного). Для этого элементы 3-го столбца матрицы, предварительно умножив на (–13) и на 4, сложим с элементами 1-го и 2-го столбцов соответственно:

$$|A| = \begin{vmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 13 & -4 & 1 \\ -10 & 12 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -40 & 18 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -88 & 36 & 6 \end{vmatrix}$$

Раскладывая по элементам второй строки и вынося общие множители, получаем:

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -40 & 18 \\ -88 & 36 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 18 \cdot (-8) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = 144$$

3. Выполнить практическую работу (по вариантам):

Вариант 1

1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

Вариант 2

1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 8 & 1 & 9 \\ 4 & 6 & 3 \end{vmatrix}$

Вариант 3

1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

Вариант 4

1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Вариант 5

1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

Вариант 6

1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

1 вариант	Баганов К., Бублик В, Киселев А.
2 вариант	Козлов М., Мехоношина В., Молодцова А.
3 вариант	Силантьев К., Фатуллаев Р., Федотов Н.
4 вариант	Филиппова К., Щекоткин Д., Крайнов А.
5 вариант	Ипполитов Е., Князев А., Мухин М., Нестеров А.
6 вариант	Осипов А., Царев Н., Тюленев Д., Штанько А.

Все практические работы выполнять на отдельных листках (оформлять аккуратно, разборчивым почерком) сфотографировать и отправить на электронную почту: olga.georg.gor@yandex.ru