<u>Тема:</u> Замечательные пределы.

1. **Прослушайте звуковой файл https://yadi.sk/d/Nkj-wDaCA1D11Q , одновременно читая лекцию.**
2. **Составить краткий конспект (записать формулы, примеры).**

I. Первый замечательный предел

Рассмотрим следующий предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x}$

Согласно нашему правилу нахождения пределов, пробуем подставить ноль в функцию: в числителе у нас получается ноль (синус нуля равен нулю), в знаменателе, очевидно, тоже ноль. Таким образом, мы сталкиваемся с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$, которую, к счастью, раскрывать не нужно. В курсе математического анализа, доказывается, что:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1$$

Данный математический факт носит название **Первого замечательного предела**. Нередко в практических заданиях функции могут быть расположены по-другому, это ничего не меняет:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{sinx}=1$ – тот же самый первый замечательный предел.

! Но самостоятельно переставлять числитель и знаменатель нельзя! Если дан предел в виде $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{sinx}=1$, то и решать его нужно в таком же виде, ничего не переставляя.

На практике в качестве параметра может выступать не только переменная x, но и элементарная или сложная функция. **Важно лишь, чтобы она стремилась к нулю**.

Примеры:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{5x}{3}}{\sin\frac{5x}{3}}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(arctgx)}{arctgx}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3-5x^2+x}{\sin(x^3-5x^2+x)}=1$

Здесь $3x\to 0$, $\frac{5x}{3}\to 0$, $arctgx\to 0$, $(x^3-5x^2+x)\to 0$, поэтому первый замечательный предел применим.

А вот следующая запись неверна:

$$\cancel{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2-3x+5)}{x^2-3x+5}=1}$$

Почему? Потому что многочлен x^2-3x+5 не стремится к нулю, он стремится к пятерке.

Переходим к рассмотрению практических примеров:

Еще раз посмотрим на формулу: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Чтобы применить первый замечательный предел, необходимо, чтобы в числителе под знаком sin и в знаменателе была одна и та же переменная или одно и то же выражение, и это выражение должно стремится к 0 при $x \to 0$.

Пример 1

Найти предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 9x}{x}$

Если мы замечаем в пределе синус, то это нас сразу должно наталкивать на мысль о возможности применения первого замечательного предела.

Сначала пробуем подставить 0 в выражение под знак предела (делаем это мысленно или на черновике): $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 9x}{x} = \frac{0}{0}$

Итак, у нас есть неопределенность вида $\frac{0}{0}$, ее *обязательно указываем* в оформлении решения. Выражение под знаком предела у нас похоже на первый замечательный предел, но это не совсем он, под знаком синуса находится 9x, а в знаменателе x.

В подобных случаях первый замечательный предел нам нужно организовать самостоятельно, используя искусственный прием. Ход рассуждений может быть таким: «под синусом у нас 9x, значит, в знаменателе нам тоже нужно получить 9x».

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 9x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 9x}{9x}$$

Однако, дробь под знаком передела изменилась: в знаменателе был x, а стал 9x, то есть знаменатель мы умножили на 9. Чтобы дробь не изменилась, нужно и числитель умножить на 9:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 9x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 9x \cdot 9}{9x}$$

Далее постоянный множитель 9 можно вынести за знак предела:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 9x}{x} = 9 \lim_{x \to 0} \frac{\sin 9x}{9x}$$

Теперь $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 9x}{9x}$ полностью удовлетворяет условиям первого замечательного предела - в числителе под знаком sin и в знаменателе одно и то же выражение 9x, и $9x \to 0$ при $x \to 0$ – и этот предел равен 1.

Оформим решение коротко: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 9x}{x} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 9x \cdot 9}{9x} = 9 \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 9x}{9x} = 9 \cdot 1 = 9$

Пример 2.

Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}$

Если мы замечаем в пределе синус, то это нас сразу должно наталкивать на мысль о возможности применения первого замечательного предела.
Сначала пробуем подставить 0 в выражение под знак предела (делаем это мысленно или на черновике):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}=\frac{0}{0}$$

Итак, у нас есть неопределенность вида $\frac{0}{0}$, ее *обязательно указываем* в оформлении решения. Выражение под знаком предела у нас похоже на первый замечательный предел, но это не совсем он, под знаком синуса находится $7x$, а в знаменателе $3x$.
В подобных случаях первый замечательный предел нам нужно организовать самостоятельно, используя искусственный прием. Ход рассуждений может быть таким: «под синусом у нас $7x$, значит, в знаменателе нам тоже нужно получить $7x$».
А делается это очень просто:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3\cdot 7x}$$

Однако, дробь под знаком передела изменилась: в знаменателе было 3x, а стало 3·7x, то есть знаменатель мы умножили на 7. Чтобы дробь не изменилась, нужно и числитель умножить на 7:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x\cdot 7}{3\cdot 7x}$$

Далее постоянный множитель $\frac{7}{3}$ можно вынести за знак предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x\cdot 7}{3\cdot 7x}=\frac{7}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}$$

Теперь $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}$ полностью удовлетворяет условиям первого замечательного предела - в числителе под знаком sin и в знаменателе одно и то же выражение 7x, и $7x\to 0$ при $x\to 0$ – и этот предел равен 1.

Оформим решение коротко: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x\cdot 7}{3\cdot 7x}=\frac{7}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}=\frac{7}{3}\cdot 1=\frac{7}{3}$

Пример 3.

Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2}{\sin^2\dfrac{x}{2}}$

Опять мы видим в пределе дробь и синус. Пробуем подставить в числитель и знаменатель ноль:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\dfrac{x}{2}}=\frac{0}{0}$$

Действительно, у нас неопределенность $\dfrac{0}{0}$ и, значит, нужно попытаться организовать первый замечательный предел.

Степени мы представим в виде произведения (множителей):

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\dfrac{x}{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot x}{\sin\dfrac{x}{2}\cdot\sin\dfrac{x}{2}}$$

Далее, по уже знакомой схеме организовываем первые замечательные пределы. Под синусами у нас $\dfrac{x}{2}$, значит, в числителе тоже нужно получить $\dfrac{x}{2}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\dfrac{x}{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot x}{\sin\dfrac{x}{2}\cdot\sin\dfrac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot 2\cdot 2\cdot\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}\cdot\sin\dfrac{x}{2}}$$

Обводим карандашом замечательные пределы (здесь их два), и указываем, что они стремятся к единице:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\dfrac{x}{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot x}{\sin\dfrac{x}{2}\cdot\sin\dfrac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot 2\cdot 2\cdot\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}\cdot\sin\dfrac{x}{2}}$$

Собственно, ответ готов:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\dfrac{x}{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot x}{\sin\dfrac{x}{2}\cdot\sin\dfrac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot 2\cdot 2\cdot\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}\cdot\sin\dfrac{x}{2}}=5\cdot 2\cdot 2=20$$

II. Второй замечательный предел

В теории математического анализа доказано, что:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

Данный факт носит название **второго замечательного предела**.

(Справка: $e = 2{,}718281828...$ *– это иррациональное число.)*

В качестве параметра может выступать не только переменная x, но и функция. **Важно лишь, чтобы она стремилась к бесконечности**.

Чтобы применить второй замечательный предел, необходимо, чтобы в числителе была обязательно 1, в знаменателе и в показателе степени над скобкой была одна и та же переменная или одно и то же выражение, и это выражение должно стремится к ∞ при $x\to\infty$.

Пример 4.

Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{x}$

Когда выражение под знаком предела находится в степени – это первый признак того, что нужно попытаться применить второй замечательный предел.

Но сначала, как всегда, пробуем подставить бесконечно большое число в выражение $\left(1+\frac{7}{x}\right)^{x}$.

Нетрудно заметить, что при $x\to\infty$ основание степени $1+\frac{7}{x}\to 1$, а показатель $x\to\infty$, то есть имеется, неопределенность вида 1^{∞}:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{x}=1^{\infty}$$

Данная неопределенность как раз и раскрывается с помощью второго замечательного предела. Но его нужно искусственно организовать. Рассуждать можно следующим образом: в числителе должна быть 1, а в знаменателе любое выражение, стремящееся к бесконечности, поэтому в числителе запишем 1 (в числителе было число 7, а стало 1, то есть числитель мы разделили на 7), значит и знаменатель нужно разделить на 7: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{7}}\right)^{x}$

Так как в знаменателе мы имеем $\frac{x}{7}$, то в показателе над скобкой тоже должно быть $\frac{x}{7}$, но чтобы выражение в показателе не изменилось (а мы его разделили на 7) умножим его на 7:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{7}}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{7}}\right)^{\frac{x}{7}\cdot 7}$$

Тогда выделенный предел полностью удовлетворяет условиям второго замечательного предела (в числителе 1, в знаменателе и в показателе степени над скобкой одно и то же выражение $\frac{x}{7}$, и это выражение стремится к ∞ при $x\to\infty$), этот предел равен *e*.

Оформим решение коротко:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{x} = 1^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{7}}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{7}}\right)^{\frac{x}{7}\cdot 7} = e^{7}$$

<u>Пример 5.</u>

Найти предел $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{5x}$

Когда выражение под знаком предела находится в степени – это первый признак того, что нужно попытаться применить второй замечательный предел.

Но сначала, как всегда, пробуем подставить бесконечно большое число в выражение $\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{5x}$.

Нетрудно заметить, что при $x\to\infty$ основание степени $\left(1+\frac{3}{2x}\right)$, а показатель $x\to\infty$, то есть имеется, неопределенность вида 1^{∞}:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{5x} = 1^{\infty}.$$

В числителе должна быть 1, а в знаменателе любое выражение, стремящееся к бесконечности, поэтому в числителе запишем 1 (в числителе было число 3, а стало 1, то есть числитель мы разделили на 3), значит и знаменатель нужно разделить на 3:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{5x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x}{3}}\right)^{5x}$$

Так как в знаменателе мы имеем $\frac{2x}{3}$, то в показателе над скобкой тоже должно быть $\frac{2x}{3}$,

но чтобы выражение в показателе не изменилось умножим его на: $\frac{3}{2}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{5x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x}{3}}\right)^{5x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x}{3}}\right)^{\frac{2x}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot 5}$$

Тогда выделенный предел полностью удовлетворяет условиям второго замечательного предела (в числителе 1, в знаменателе и в показателе степени над скобкой одно и то же выражение $\frac{2x}{3}$, и это выражение стремится к ∞ при $x\to\infty$), этот предел равен *e*.

Оформим решение коротко:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{5x} = 1^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x}{3}}\right)^{5x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x}{3}}\right)^{\frac{2x}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot 5} = e^{\frac{15}{2}} = e^{7,5}$$

<u>Пример 6.</u>

Найти предел $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{2x}\right)^{5x}$.

Этот предел отличается от предыдущего лишь тем, что в скобках вместо знака «+» стоит знак « - ». Сразу записываем решение коротко, так принцип решения тот же:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{2x}\right)^{5x} = 1^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{2x}{3}}\right)^{5x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{2x}{3}}\right)^{-\frac{2x}{3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot 5} = e^{-\frac{15}{2}}$$

3. Выполнить практическую работу (по вариантам):

ВАРИАНТ 1

1. Вычислить пределы:

а) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{x}$ б) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$ в) $\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{\sin x}$ г) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x}\right)^{2x}$

ВАРИАНТ 2

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{x}\right)^{x}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 4x}{4x^2}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{3x}\right)^{\frac{x}{5}+1}$

ВАРИАНТ 3

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{x}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 \frac{x}{3}}{x^2}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-6}{x}\right)^{3x}$

ВАРИАНТ 4

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 11x}{x}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{x}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 4x}{4x^2}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$

ВАРИАНТ 5

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{2x}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{x}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x}\right)^{x}$ г) $\lim\limits_{x\to 0} x ctg x$

ВАРИАНТ 6

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 10x}{5x}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{8}{x}\right)^{x}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{x}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,4x}{2x}$

На оценку «3» достаточно выполнить только примеры под буквами а) и в).

1 вариант	Баганов К., Бублик В, Киселев А.
2 вариант	Козлов М., Мехоношина В., Молодцова А.
3 вариант	Силантьев К., Фатуллаев Р., Федотов Н.
4 вариант	Филиппова К., Щекоткин Д., Крайнов А.
5 вариант	Ипполитов Е., Князев А., Мухин М., Нестеров А.
6 вариант	Осипов А., Царев Н., Тюленев Д., Штанько А.

Все практические работы выполнять на отдельных листках (оформлять аккуратно, разборчивым почерком) сфотографировать и отправить на электронную почту: olga.georg.gor@yandex.ru