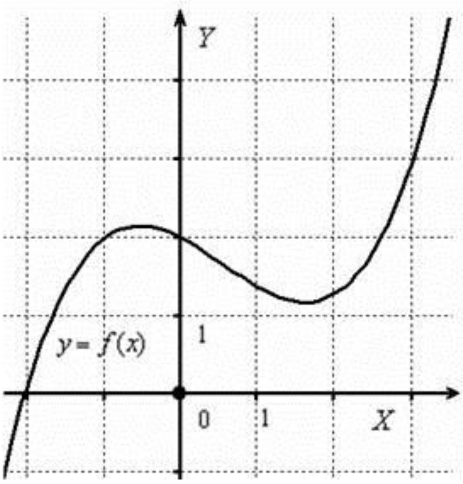
<u>Тема:</u> Непрерывность функции в точке и на промежутке. Точки разрыва функции и их род.

1. **Прослушайте звуковой файл https://yadi.sk/d/aDAMJpiK2n_p4A , одновременно читая лекцию.**
2. **Составить краткий конспект (записать определения, примеры, выполнить чертежи).**

На данном уроке мы разберём понятие непрерывности функции, классификацию точек разрыва и практическую задачу **исследования функции на непрерывность**.

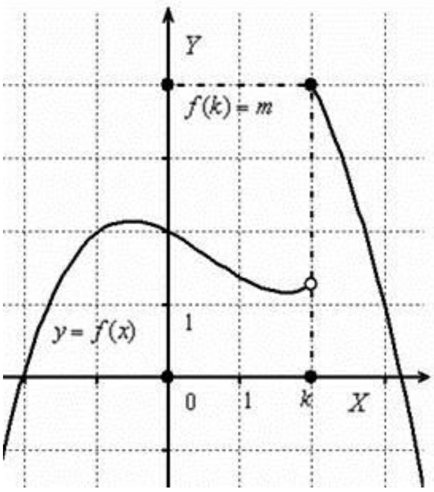
1) Рассмотрим некоторую функцию $y = f(x)$, непрерывную на всей числовой прямой:



Или, говоря лаконичнее, наша функция непрерывна на $\Re$ (множестве действительных чисел).

Каков «обывательский» критерий непрерывности? Очевидно, что график непрерывной функции можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги.

При этом следует чётко отличать два простых понятия: **область определения функции** и **непрерывность функции**. В общем случае <u>это не одно и то же</u>. Например:

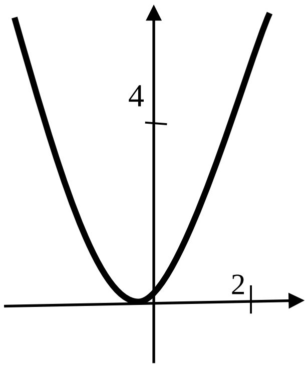


Данная функция определена на всей числовой прямой, то есть для **каждого** значения «икс» существует своё значение «игрека» $y = f(x)$. В частности, если $x = k$, то $y = f(k) = m$. Заметьте, что другая точка выколота, ведь по определению функции, значению аргумента должно соответствовать **единственное** значение функции. Таким образом, **область определения** нашей функции: $D(f) = \Re$.

Однако **эта функция не является непрерывной на** $\Re$ **!** Совершенно очевидно, что в точке $x = k$ она терпит **разрыв**. Термин тоже вполне вразумителен и нагляден, действительно, карандаш здесь по любому придётся оторвать от бумаги.

Рассмотрим примеры 2, 3, 4, 5 с предыдущего занятия:

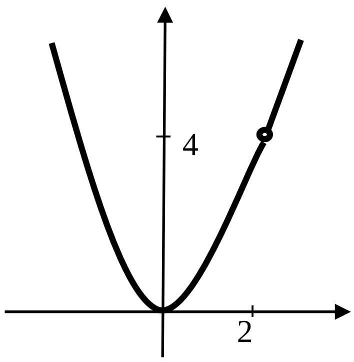
а) $\mathbf{y = x^2}$



$y(2) = 4$

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4$$

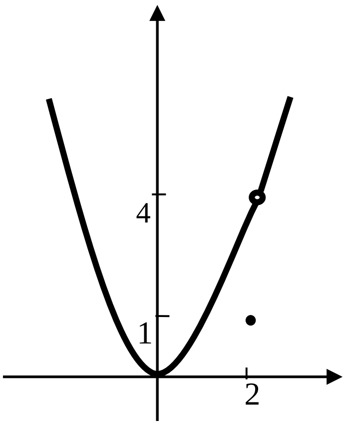
б) $\mathbf{g(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \neq 2 \\ \text{не существует, если } x = 2 \end{cases}}$



$g(2)$ не существует

$$\lim_{x\to 2} g(x) = 4$$

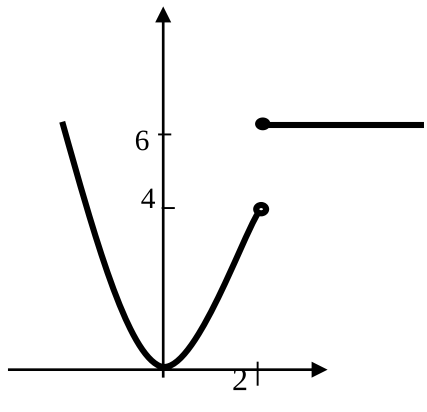
в) $\mathbf{h(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \neq 2 \\ 1, \text{ если } x = 2 \end{cases}}$



$h(x) = 1$

$$\lim_{x\to 2} h(x) = 4$$

г) $\mathbf{f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } x < 2 \\ 6, \text{ если } x \geq 2 \end{cases}}$



$f(x) = 6$

$$\lim_{x\to 2} f(x) \text{ не существует}$$

Если рассматривать эти графики, то чисто интуитивно можно назвать непрерывной в точке 2 только функцию **$y = x^2$** (пример а)).

Попробуем осмыслить понятие непрерывности функции в точке с точки зрения теории пределов.

Совершенно понятно, что функцию **g(x)** (пример б)) нельзя назвать непрерывной в точке 2 по той причине, что в этой точке не существует значение функции.

Функцию **f (x)** (пример г)) нельзя назвать непрерывной в точке 2 по той причине, что в этой точке не существует предел функции.

Почему же не является непрерывной в точке 2 функция h(x) из примера в), ведь в отличие от примеров б) и г) в точке 2 существует и значение функции, и предел функции? Для ответа на этот вопросы сравните функции а) и в). В примере а) мы видим, что $\mathrm{y}(2) = \lim\limits_{\mathrm{x}\to 2} \mathrm{y} = 4$ (значение функции в точке и ее предел в этой точке совпадают), а в примере в) $h(2) \neq \lim\limits_{x\to 2} h(x)$ (значение функции в точке и ее предел в этой точке различны).

Сделаем вывод:

Для того, чтобы функция была непрерывной в данной точке, необходимо, чтобы:

1) **Функция была определена в этой точке, то есть должно существовать значение функции в этой точке.**
2) **Должен существовать предел функции в этой точке.**
3) **Предел функции в данной точке должен быть равен значению функции в этой точке.**

Коротко определение непрерывности в данной точке можно сформулировать так:

Функция непрерывна в точке , если предел функции в данной точке равен значению функции в этой точке: $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)}$**.**

Обратите внимание на то, что функции б), в) и г) не являются непрерывными только в точке 2, а во всех остальных точках эти функции непрерывны; поэтому имеет смысл говорить о непрерывности функции не только в точке, но и на промежутке.

Функция называется непрерывной на некотором промежутке, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Тогда можно сказать, что функция а) непрерывна на всей числовой прямой, т. е. на промежутке (- ∞; +∞), а каждая из функций б), в) и г) непрерывны на промежутке

(- ∞; 2)∪ (2; +∞).

2) **Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются точками разрыва функции.**

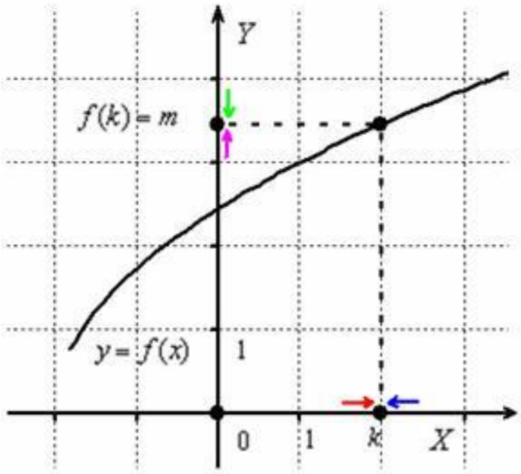
Точка x = 2 является точкой разрыва функций б), в) и г).

Примечание: *точка разрыва – это всегда <u>отдельно взятая точка</u> – не бывает «несколько точек разрыва подряд», то есть, нет такого понятия, как «интервал разрывов».*

Данные точки в свою очередь подразделяются на две большие группы: **разрывы первого рода** и **разрывы второго рода**. У каждого типа разрыва есть свои характерные особенности.

Если в некоторой точке нарушено условие непрерывности **и односторонние пределы <u>конечны</u>**, то она называется **точкой разрыва первого рода**.

Выясним, что такое «**односторонние пределы».** Рассмотрим ситуацию:



Если приближаться по оси OX к точке k **слева** (красная стрелка), то соответствующие значения «игреков» будут идти по оси OY к точке m (малиновая стрелка). Математически данный факт фиксируется с помощью **левостороннего предела**:

$$\lim_{x \to k-0} f(x) = m$$

Обратите внимание на запись $x \to k-0$ (читается «икс стремится к ка слева»). «Добавка» «минус ноль» и обозначает, что мы подходим к числу k с левой стороны.

Аналогично, если приближаться к точке «ка» **справа** (синяя стрелка), то «игреки» придут к тому же значению m, но уже по зелёной стрелке, и **правосторонний предел** оформится следующим образом:

$$\lim_{x \to k+0} f(x) = m$$

Запись $x \to k+0$ читается так: «икс стремится к ка справа».

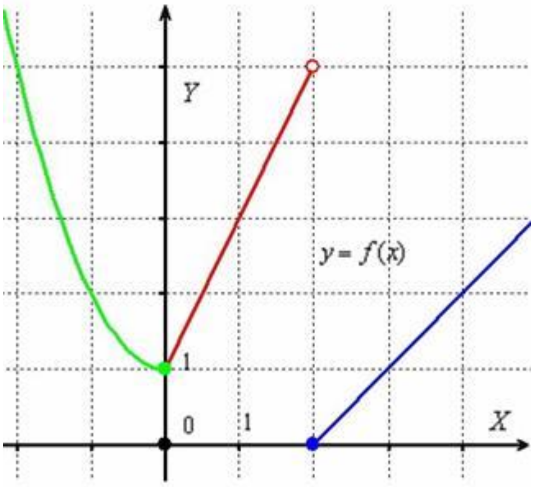
«Добавка» $+0$ и обозначает, что мы подходим к числу k с правой стороны.

В примерах б), в) и г) точка 2 – точка разрыва первого рода, причем в примерах б), в) разрыв называют **устранимым**, а в примере в) - **разрывом первого рода со скачком**.

Рассмотрим еще один пример функции с точкой разрыва первого рода со скачком:

Рассмотрим функцию $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{если} \quad x\le 0 \\ 1+2x, & \text{если} \quad 0<x<2 \\ x-2, & \text{если} \quad x\ge 2 \end{cases}$ и выполним её чертёж. Как построить график? Очень просто. На полуинтервале $(-\infty;0]$ чертим фрагмент параболы $f(x)=x^2+1$ (зеленый цвет), на интервале $(0;2)$ – отрезок прямой $f(x)=1+2x$ (красный цвет) и на полуинтервале $[2;+\infty)$ – прямую $f(x)=x-2$ (синий цвет).

При этом в силу неравенства $x\le 0$ значение $f(0)$ определено для квадратичной функции $f(x)=x^2+1$ (зелёная точка), и в силу неравенства $x\ge 2$, значение $f(2)$ определено для линейной функции $f(x)=x-2$ (синяя точка):



Сейчас нас будет интересовать только точка $x=2$. Исследуем её на непрерывность:

1) $f(2)=2-2=0$ – функция определена в данной точке.

2) Вычислим односторонние пределы.

Слева у нас красный отрезок прямой, поэтому левосторонний предел: $\lim\limits_{x\to 2-0}(1+2x)=1+2\cdot 2=5$

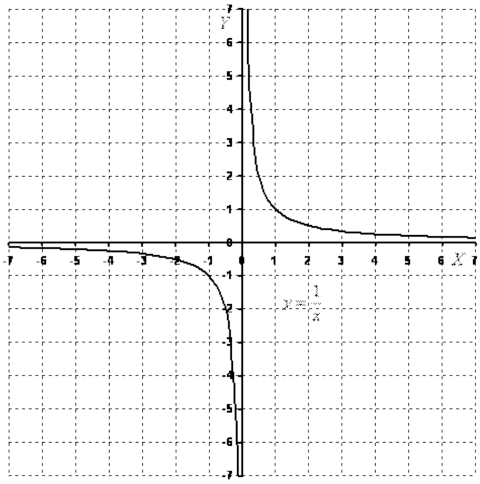
Справа – синяя прямая, и правосторонний предел: $\lim\limits_{x\to 2+0}(x-2)=2-2=0$

В результате получены *конечные числа*, причем они *не равны*. Поскольку односторонние пределы <u>конечны и различны</u>: $\lim\limits_{x\to 2-0}(1+2x)\ne\lim\limits_{x\to 2+0}(x-2)$, то наша функция терпит <u>разрыв первого рода со скачком</u>.

Если в некоторой точке нарушено условие непрерывности **и односторонние пределы <u>бесконечны</u>**, то она называется **точкой разрыва второго рода**.

Примером функции с точкой разрыва второго рода может служить функция $y = \frac{1}{x}$

Графиком ее является гипербола:

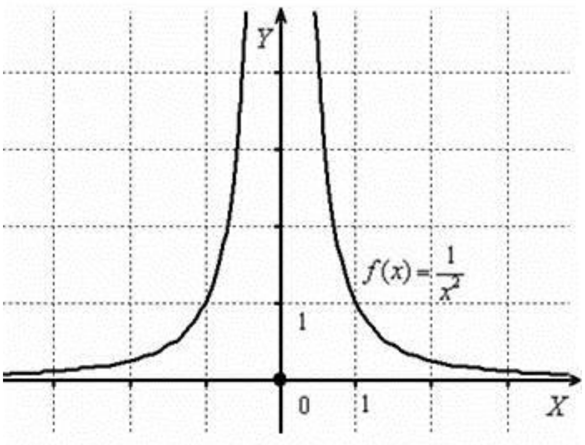


Здесь оба односторонних предела бесконечны: $\lim\limits_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim\limits_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty$,

следовательно, функция $f(x) = \frac{1}{x}$ терпит разрыв второго рода в точке $x = 0$.

Рассмотрим еще один пример функции с точкой разрыва второго рода:

$f(x) = \frac{1}{x^2}$,



Исследуем на непрерывность точку $x = 0$ по стандартной схеме:

1) Функция не определена в данной точке, поскольку знаменатель обращается в ноль.

Конечно, можно сразу сделать вывод о том, что функция терпит разрыв в точке $x = 0$, но хорошо бы классифицировать характер разрыва, что часто требуется по условию. Для этого:

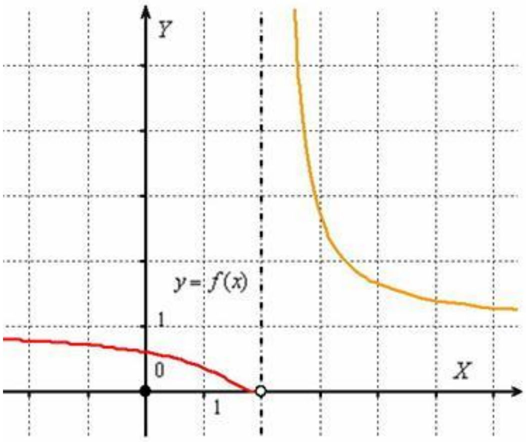
2) Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{1}{x^2} = \frac{1}{(-0)^2} = \frac{1}{+0} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x^2} = \frac{1}{(+0)^2} = \frac{1}{+0} = +\infty$$

Односторонние пределы бесконечны, значит, функция $f(x) = \frac{1}{x^2}$ терпит разрыв 2-го рода в точке $x = 0$.

Не редка ситуация, когда оба односторонних предела существуют, но бесконечен только один из них, например:



Это график функции $f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$.

Исследуем на непрерывность точку $x = 2$:

1) Функция не определена в данной точке.

2) Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0} e^{\frac{1}{x-2}} = e^{\frac{1}{2-0-2}} = e^{\frac{1}{-0}} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0} e^{\frac{1}{x-2}} = e^{\frac{1}{2+0-2}} = e^{\frac{1}{+0}} = e^{+\infty} = +\infty$$

Левосторонний предел конечен и равен нулю (в саму точку мы «не заходим»), но правосторонний предел бесконечен. Таким образом,

функция $y = f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$ терпит **разрыв второго рода** в точке $x = 2$.

<u>Пример.</u> Исследовать на непрерывность функцию, определить род точек разрыва:

а) $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x+1}$; D (f) = (-∞; - 1)∪(- 1; +∞)

-1 – точка разрыва функции. Определим ее род:

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{(x-1)^2}{x+1}=\left[\frac{(-1-0-1)^2}{-1-0+1}\right]=\left[\frac{4}{-0}\right]=-\infty;\ \lim_{x\to-1+0}\frac{(x-1)^2}{x+1}=\left[\frac{(-1+0-1)^2}{-1+0+1}\right]=\left[\frac{4}{+0}\right]=+\infty,$$

следовательно, -1 – точка разрыва второго рода.

3) Какие же известные нам функции являются непрерывными?

<u>Теорема.</u> Всякая элементарная функция непрерывна на всей своей области определения.

Линейная функция $y = кх + в$, квадратичная функция $y = ax^2 + вx + c$, рациональные функции (многочлены), функции $y = sin\ x$, $y = cos\ x$, показательная функция $y = a^x$ определены, а значит и непрерывны на множестве всех действительных чисел.

Функция $y=\sqrt{x}$ определена и непрерывна на множестве [0; +∞).

Функция $y=tgx$ определена и непрерывна на множестве $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$.

Функция $y = ctg\ x$ определена и непрерывна на множестве $(\pi k;\ \pi+\pi k)$.

Логарифмическая функция $y=log_a x$ определена и непрерывна на множестве (0; +∞).

4) И в конце лекции сделаем очень важный вывод:

Если некоторая функция непрерывна в данной точке, то предел функции в этой точке равен значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

Например, так как функция $y = sin\ x$ непрерывна на множестве всех действительных чисел, а значит и в точке $x=\frac{\pi}{6}$, то $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}sinx=sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

3. Ответить на контрольные вопросы (устно):

1) Сформулировать определение непрерывности функции в точке и на отрезке. Привести примеры непрерывных функций.
2) Дать определение точки разрыва функции.
3) Дать определение точки разрыва первого и второго рода.