<u>Тема:</u> Понятие о пределе функции. Теоремы о пределах.

1. **Прослушайте звуковой файл https://yadi.sk/d/vvW6c5RAQmwlxg , одновременно читая лекцию.**
2. **Составить краткий конспект (записать определения, примеры, выполнить чертежи).**

Теория пределов – это один из разделов математического анализа. Вопрос решения пределов является достаточно обширным, поскольку существуют десятки приемов решений пределов различных видов. Существуют десятки нюансов и хитростей, позволяющих решить тот или иной предел. Тем не менее, мы все-таки попробуем разобраться в основных типах пределов, которые наиболее часто встречаются на практике.

Начнем с самого понятия предела. Вы должны **ПОНИМАТЬ**, что такое **предел функции**. Не выучить, не зазубрить, а именно **понять** хотя бы на общем, интуитивном уровне. Для этого рассмотрим несколько примеров.

1) **y = 2x + 3**

Это известная вам линейная функция. Зададим несколько значений аргумента x и вычислим соответствующие им значения функции:

x	**3**	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{6}$	$2\frac{1}{10}$	$2\frac{1}{100}$	**x → 2 справа**
f(x)	**9**	**8**	$7\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{3}$	$7\frac{1}{5}$	$7\frac{1}{50}$	**f(x) → 7**
x	**1**	**1,5**	**1,8**	**1,9**	**1,99**	**1,999**	**x → 2 слева**
f(x)	**5**	**6**	**6,6**	**6,8**	**6,98**	**6,998**	**f(x) → 7**

Если очень внимательно посмотреть на значения аргумента **x**, то можно заметить, что подобраны они не совсем случайно, а именно, в первой строке они уменьшаются и неограниченно приближаются (будем говорить «стремятся») к числу **2** справа; в третьей же строке значения аргумента **x** увеличиваются и неограниченно приближаются к числу **2**, но уже слева. При этом заметьте, что значения функции **f(x)** и во второй и в четвертой строках неограниченно приближаются к числу **7**.

При $x \to 2$ $f(x) \to 7$ (при x, стремящемся к 2, f(x) стремится к 7).

Еще раз более четко сформулируем этот факт:

По мере того, как значения аргумента неограниченно приближаются к числу 2 <u>с обеих сторон</u>, значения функции неограниченно приближаются <u>к одному и тому же числу</u> 7.

Число 7 называется пределом функции y = 2x + 3 при x, стремящемся к 2, или в точке 2.

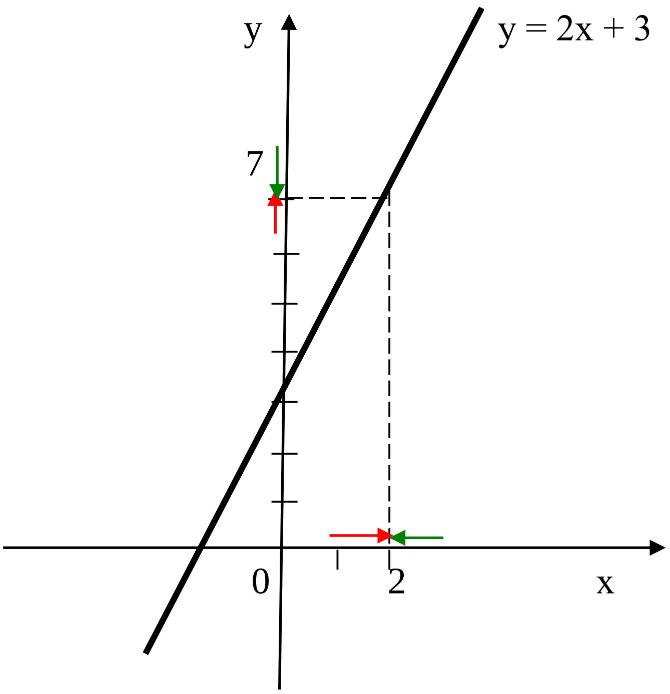
Предел функции будем обозначать значком lim (сокращение от *limit*), под знаком предела записываем, в какой точке находим предел (или к какому числу стремится x):

$$\lim_{x\to 2}(2x+3)=7$$

Читается это так: предел функции 2x + 3, при x, стремящемся к 2, равен 7 (или предел функции 2x + 3 в точке 2 равен 7).

Однако, находить предел функции, всякий раз строя таблицу значений, не очень удобно, поэтому попробуем поискать другой способ нахождения предела функции, например, графический.

2) Построим график функции **y = 2x + 3** по двум точкам (0; 3) и (1; 5):

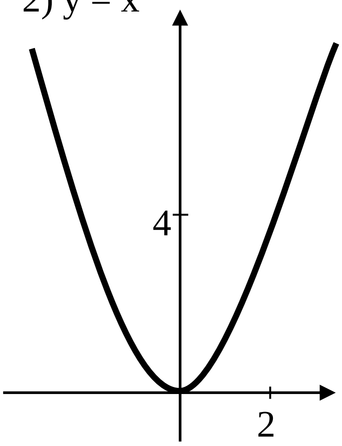


Двигаясь по оси x к числу 2 слева и одновременно двигаясь по графику функции, мы заметим, что значение функции по оси y приближается к числу 7 снизу (красные стрелки).
Двигаясь по оси x к числу 2 справа и одновременно двигаясь по графику функции, мы заметим, что значение функции по оси y приближается к числу 7 сверху (зеленые стрелки).
По мере того, как значения аргумента неограниченно приближаются к числу 2 <u>с обеих сторон</u>, значения функции неограниченно приближаются <u>к одному и тому же числу</u> 7.

Это и означает, что предел функции 2x + 3, при x, стремящемся к 2, равен 7:

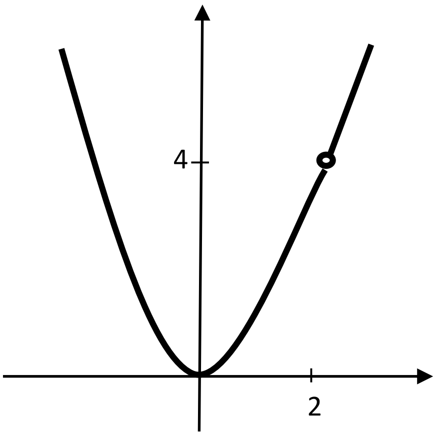
$$\lim_{x\to 2}(2x+3)=7$$

2) $y = x^2$



$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4$$

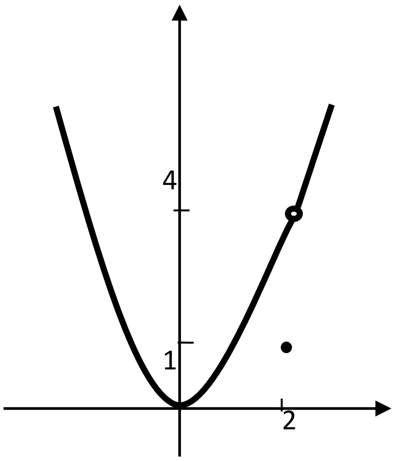
3) $g(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \neq 2 \\ \text{не существует, если } x = 2 \end{cases}$



$$\lim_{x\to 2} g(x) = 4$$

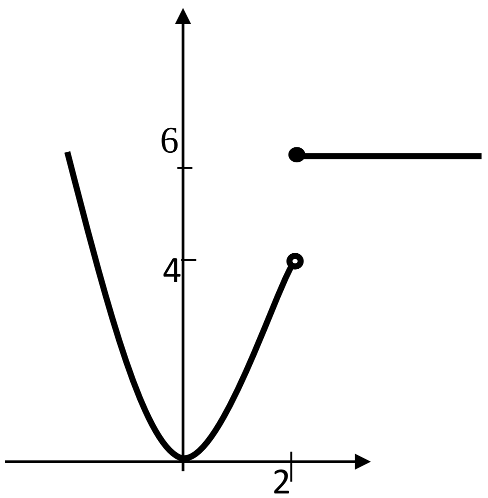
Обратите внимание на то, что значение функции в точке 2 не существует, а предел функции в этой точке существует и равен 4!

4) $h(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \neq 2 \\ 1, \text{ если } x = 2 \end{cases}$



$$\lim_{x\to 2} g(x) = 4$$

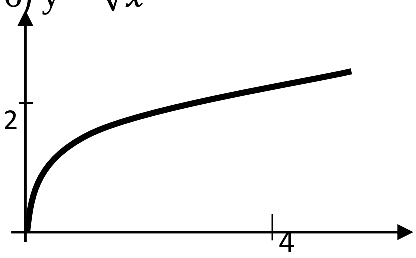
5) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } x < 2 \\ 6, \text{ если } x \geq 2 \end{cases}$



$\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ не существует

Предел данной функции в точке 2 не существует, так как при стремлении x к числу 2 слева y стремится к 4, а при стремлении x к числу 2 справа y стремится к 6, а **не к одному и тому же числу.**

6) y = $\sqrt{x}$

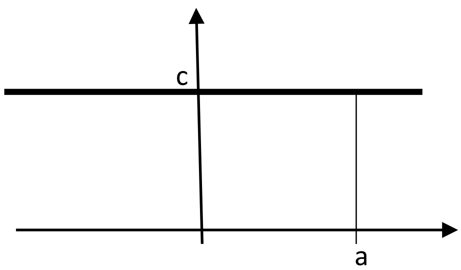


$\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x} = 2$

$\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x}$ не существует, так как не известно, как ведет себя функция при x, стремящемся к 0 слева (на интервале (-∞, 0) функция y = $\sqrt{x}$ не существует).

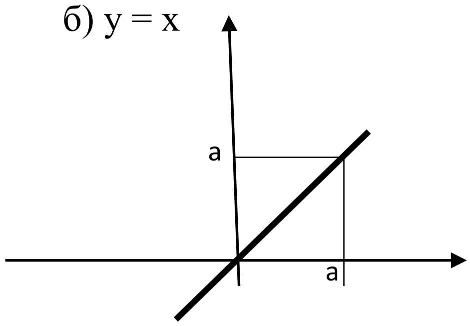
Рассмотрим еще два примера, которые позволят нам в дальнейшем находить пределы более простым способом:

а) y = C



$\lim\limits_{x \to a} C = c \quad (1)$

б) y = x



$\lim\limits_{x \to a} x = a \quad (2)$

Например,
$\lim\limits_{x\to -3} 6 = 6;\ \lim\limits_{x\to 5}(-3{,}7) = -3{,}7;\quad \lim\limits_{x\to 4} x = 4;\ \lim\limits_{x\to -3} x = -3$

Заметим, что находить пределы функций с помощью графиков также непросто. Для того, чтобы упростить эту задачу, сформулируем теоремы о пределах.

Теоремы о пределах

1) $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)}$**, то есть предел суммы функций в данной точке равен сумме пределов этих функций в данной точке.** Теорема справедлива для любого числа функций и для алгебраической суммы (т.е. может иметь место и знак «минус»).

2) $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)}$**, предел произведения функций в данной точке равен произведению пределов этих функций в данной точке.**
Теорема справедлива для любого числа функций.

Следствие 1:
$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a}(C\cdot f(x)) = C\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)}$**, то есть постоянный множитель можно выносить за знак предела.**

Следствие 2:
$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} x^n = (\lim\limits_{x\to a} x)^n}$

3) $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)};\ \ g(x)\neq 0;\ \lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0}$**, то есть предел частного двух функций в данной точке равен частному пределов этих функций в данной точке при условии, что** $\boldsymbol{g(x)\neq 0;\ \lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0}$**.**

Рассмотрим примеры применения этих теорем, используя также формулы (1) и (2).

а) $\lim\limits_{x\to -1}(4x-7)$; б) $\lim\limits_{x\to 3}(3x^2+2x-1)$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{5x+2}{2x-7}$

а) $\lim\limits_{x\to -1}(\mathbf{4x-7}) = \lim\limits_{x\to -1} 4x - \lim\limits_{x\to -1} 7 = 4\cdot\lim\limits_{x\to -1} x - \lim\limits_{x\to -1} 7 = \mathbf{4\cdot(-1)-7} = -11$

б) $\lim\limits_{x\to 3}(\mathbf{3x^2+2x-1}) = \lim\limits_{x\to 3} 3x^2 + \lim\limits_{x\to 3} 2x - \lim\limits_{x\to 3} 1 = 3\cdot\lim\limits_{x\to 3} x^2 + 2\cdot\lim\limits_{x\to 3} x - 1 = 3 * (\lim\limits_{x\to 3} x)^2 + 2\cdot\lim\limits_{x\to 3} x - 1 = \mathbf{3\cdot 3^2+2\cdot 3-1} = 32$

в) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\mathbf{5x+2}}{\mathbf{2x-7}} = \frac{\lim\limits_{x\to 4}(5x+2)}{\lim\limits_{x\to 4}(2x-7)} = \frac{5\cdot\lim\limits_{x\to 4} x + \lim\limits_{x\to 4} 2}{2\cdot\lim\limits_{x\to 4} x - \lim\limits_{x\to 4} 7} = \frac{\mathbf{5\cdot 4+2}}{\mathbf{2\cdot 4-7}} = \frac{22}{1} = 22$

Посмотрите внимательно на выделенные фрагменты примеров и попробуйте сделать вывод.

2.Вычислить следующие пределы, используя теоремы о пределах и формулы (1) и (2) (работу выполнить в рабочих тетрадях):

а) $\lim\limits_{x\to -2}(6x+4)$; б) $\lim\limits_{x\to -1}(5x^2 - 4x+2)$; в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x-1}{6x+2}$