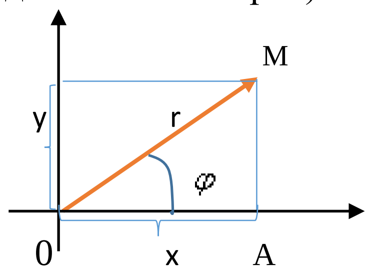
<u>Тема:</u> Тригонометрическая и показательная форма комплексного числа

1. **Прослушайте звуковой файл** https://yadi.sk/d/6cQaDCz1hQSUuQ , **одновременно читая лекцию.**
2. **Составить краткий конспект (записать определения, примеры, выполнить чертежи).**

1) Тригонометрическая форма комплексного числа

Выражение $\boldsymbol{z = x + yi}$ – алгебраическая форма комплексного числа.

Изобразим это комплексное число в комплексной плоскости в виде радиуса-вектора (для определённости и простоты объяснений расположим его в первой координатной четверти):



Модулем комплексного числа $z = x + yi$ называется длина (модуль) соответствующего ему вектора.

Модуль комплексного числа z стандартно обозначают: $|z|$ или r.

По теореме Пифагора из прямоугольного △OAM имеем: $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ **(1).**

Аргументом комплексного числа $z = x + yi \neq 0$ называется величина любого направленного угла, образованного положительным направлением действительной оси и вектором, соответствующим числу z : arg z = φ.

Аргумент комплексного числа z стандартно обозначают: φ или $\arg z$.

Из прямоугольного △OAM имеем: $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$ **(2)**; $\varphi = arctg\dfrac{y}{x}$; $x = r\cos\varphi$;

$y = r\sin\varphi$.

Подставляя значения x и y в алгебраическую форму комплексного числа, получим:

$z = x + yi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ **– тригонометрическая форма комплексного числа. (3)**

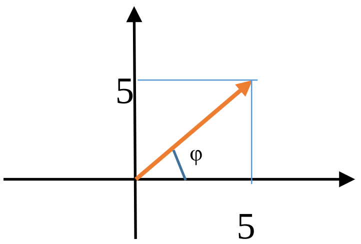
Для перевода числа из алгебраической формы в тригонометрическую используем формулы (1), (2) и (3). Чтобы не ошибиться в выборе аргумента φ, следует графически изобразить данное комплексное число на координатной плоскости.

Пример 1. Представить в тригонометрической форме комплексные числа:

а) $z_1 = 5+5i$; б) $z_2 = 5 - 5i$; в) $z_3 = -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$

а) $z_1 = 5+5i$; $r=\sqrt{x^2+y^2}$ $r_1=\sqrt{5^2+5^2}=\sqrt{2\cdot 5^2}=5\sqrt{2}$;

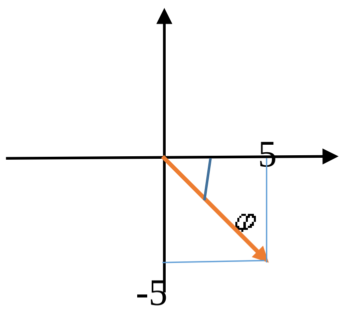
Прежде чем найти аргумент, изобразим данное число на координатной плоскости:



$tg\varphi_1=\frac{5}{5}=1$. Для нахождения аргумента используем таблицу значений тригонометрических функций из приложения в конце лекции, в таблице в строке tg x находим число 1 и, поднимаясь по столбику вверх, находим значение угла в радианах $\varphi_1=\frac{\pi}{4}$ (На чертеже видно, что аргумент находится в первой четверти, поэтому его значение находим в таблице на промежутке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$).

Тогда $r_1=5\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)$

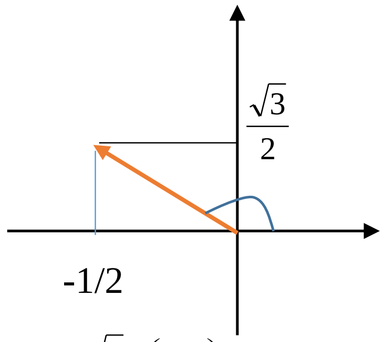
б) $z_2 = 5 - 5i$; $r=\sqrt{x^2+y^2}$ $r_2=\sqrt{5^2+(-5)^2}=\sqrt{2\cdot 5^2}=5\sqrt{2}$;



$tg\varphi_2=\frac{-5}{5}=-1$ Аргумент находится в четвертой четверти, поэтому его значение находим в таблице на промежутке $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$:

$\varphi_2=\frac{7\pi}{4}$; Тогда $z_2=5\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

в) $z_3 = -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$; $r=\sqrt{x^2+y^2}$ $r_3=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$;



$tg\varphi_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} : \left(-\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3}$; Аргумент находится во второй четверти, поэтому его значение находим в таблице на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$: $\varphi_3 = \frac{2\pi}{3}$; Тогда $z_3 = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{3}\right)$

Тригонометрическая запись комплексного числа удобна для выполнения операций умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня.

1. ***Умножение.***

При умножении комплексных чисел их модули умножаются, а аргументы складываются:

Если $\boldsymbol{z_1 = r_1 (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)}$; $\boldsymbol{z_2 = r_2 (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)}$,

то $\boldsymbol{z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i \sin(\varphi_1+\varphi_2))}$ (4)

2. ***Деление.***

При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются:

Если $\boldsymbol{z_1 = r_1 (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)}$; $\boldsymbol{z_2 = r_2 (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)}$,

то $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$ **(5)**

3. ***Возведение в степень.***

При возведении комплексного числа в степень его модуль возводится в соответствующую степени, а модуль умножается на показатель степени:

Если $\boldsymbol{z = r (\cos\varphi + i \sin\varphi)}$,

то $\boldsymbol{z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)}$ **– Формула Муавра. (6)**

4. ***Извлечение корня.***

Если $\boldsymbol{z = r (\cos\varphi + i \sin\varphi)}$,

то $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$**, где $\boldsymbol{k}$ = 0, 1, 2, …, n – 1 (7)**

Напомню, что корень n-ной степени имеет n значений, что и обеспечивается подстановкой в формулу (7) значений $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Пример 2. Дано: $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; $z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

Найти $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; z_1^3; $\sqrt[3]{z_1}$

По формуле (4): $z_1 \cdot z_2 = 2\cdot 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\right) = 6\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$

По формуле (5): $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{2}{3}\left(\cos(-\frac{\pi}{12}) + i\sin(-\frac{\pi}{12})\right)$

*(**Примечание:** Ни в коем случае нельзя использовать четность косинуса, нечетность синуса и проводить дальнейшее «упрощение» записи, т. е.*
$\frac{2}{3}\left(\cos(-\frac{\pi}{12}) + i\sin(-\frac{\pi}{12})\right) \neq \frac{2}{3}\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\cdot\sin\frac{\pi}{12}\right)$*)*

По формуле (6): $z_1^{\,3} = 2^3\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 8\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

По формуле (7): $\sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}\right)$, где k = 0, 1, 2. (8)

Корень третьей степени имеет три значения, поэтому последовательно подставляем в формулу (8) вместо k значения 0, 1, 2.

$$(\sqrt[3]{z_1})_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi\cdot 0}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi\cdot 0}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$(\sqrt[3]{z_1})_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi\cdot 1}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi\cdot 1}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$(\sqrt[3]{z_1})_3 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi\cdot 2}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi\cdot 2}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$$

2)Показательная форма комплексного числа

Показательная форма в практических заданиях встречается значительно реже, поэтому рассмотрим это понятие в ознакомительном плане.

Любое комплексное число (кроме нуля) $z = a + bi$ можно записать в показательной форме: $z = r \cdot e^{i\varphi}$, где **r** – это модуль комплексного числа, а φ – аргумент комплексного числа. (*e* – это некоторая постоянная в математике, основание натурального логарифма, $e \approx 2{,}718$).

Что нужно сделать, чтобы представить комплексное число в показательной форме? Почти то же самое: выполнить чертеж, найти модуль и аргумент. И записать число в виде $z = r \cdot e^{i\varphi}$.

В примере 1 а) для числа $z_1 = 5+5i$ уже найдены модуль $r_1 = 5\sqrt{2}$ и аргумент $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$.

Тогда показательная форма этого числа имеет вид: $z = 5\sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}$

Запишите самостоятельно в показательной форме числа из примера 1 б) и в)

3. Выполнить практическую работу (по вариантам):

Вариант 1

1. Даны числа:
   $z_1 = \sqrt{3} - i$
   $z_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$
   Представьте число z_1 в тригонометрической форме (см. пример 1).
   Вычислите, используя правила умножения и деления комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме: $z_1 \cdot z_2$, $z_1 : z_2$, z_2^3; $\sqrt[3]{z_2}$(см. пример 2).

Вариант 2

1. Даны числа:
   $z_1 = -1 - i\sqrt{3}$
   $z_2 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$
   Представьте число z_1 в тригонометрической форме (см. пример 1).

   Вычислите, используя правила умножения и деления комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме: $z_1 \cdot z_2$, $z_1 : z_2$, z_2^3; $\sqrt[3]{z_2}$ (см. пример 2).

Вариант 3

1. Даны числа:

$z_1 = 1 - i\sqrt{3}$

$z_2 = 12(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$

Представьте число z_1 в тригонометрической форме (см. пример 1).

Вычислите, используя правила умножения и деления комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме: $z_1 \cdot z_2$, $z_1 : z_2$, z_2^3; $\sqrt[3]{z_2}\sqrt[3]{z}$ (см. пример 2).

Вариант 4

1. Даны числа:

$z_1 = 1 + i\sqrt{3}$

$z_2 = 0{,}5(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6}))$

Представьте число z_1 в тригонометрической форме (см. пример 1).

Вычислите, используя правила умножения и деления комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме: $z_1 \cdot z_2$, $z_1 : z_2$, z_2^3; $\sqrt[3]{z_2}$ (см. пример 2).

Вариант 5

1. Даны числа:

$z_1 = \sqrt{3} - i$

$z_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$

Представьте число z_1 в тригонометрической форме (см. пример 1).

Вычислите, используя правила умножения и деления комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме: $z_1 \cdot z_2$, $z_1 : z_2$, z_2^3; $\sqrt[3]{z_2}$ (см. пример 2).

Вариант 6

1. Даны числа:

$z_1 = -1 - i\sqrt{3}$

$z_2 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$

Представьте число z_1 в тригонометрической форме (см. пример 1).

Вычислите, используя правила умножения и деления комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме: $z_1 \cdot z_2$, $z_1 : z_2$, z_2^3; $\sqrt[3]{z_2}$ (см. пример 2).

1 вариант	Баганов К., Бублик В, Киселев А.
2 вариант	Козлов М., Мехоношина В., Молодцова А.
3 вариант	Силантьев К., Фатуллаев Р., Федотов Н.
4 вариант	Филиппова К., Щекоткин Д., Крайнов А.
5 вариант	Ипполитов Е., Князев А., Мухин М., Нестеров А.
6 вариант	Осипов А., Царев Н., Тюленев Д., Штанько А.

Все практические работы выполнять на отдельных листках (оформлять аккуратно, разборчивым почерком) сфотографировать и отправить на электронную почту: olga.georg.gor@yandex.ru

ПРИЛОЖЕНИЕ

Аргумент в рад.	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
tg x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
ctg x	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-
		I четверть				II четверть				III четверть				IV четверть			