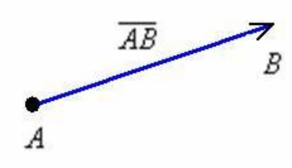
<u>Тема:</u> Векторы в пространстве. Действия с ними.

1. **Изучить теорию. Составить краткий конспект (записать определения, примеры, выполнить чертежи).**

Вектор **–** это направленный прямолинейный отрезок, то есть отрезок, имеющий определенную длину и определенное направление. Пусть точка A – начало вектора, а точка B – его конец, тогда вектор обозначается символом $\overline{AB}$ или $\overline{a}$.



Вектор $\overline{BA}$ называется ***противоположным*** вектору $\overline{AB}$ и может быть обозначен $-\overline{a}$

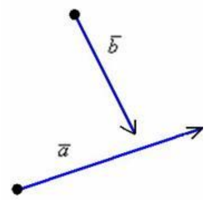
Длиной или ***модулем*** вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка и обозначается $\left|\overline{AB}\right|$. Вектор нулевой длины (его суть - точка) называется ***нулевым*** $\overline{0}$ и направления не имеет. Вектор $\overline{e}$ единичной длины, называется ***единичным***.

Действия с векторами. Коллинеарность векторов

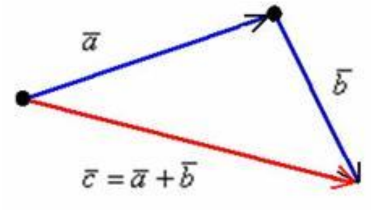
В школьном курсе геометрии рассматривается ряд действий и правил с векторами: *сложение по правилу треугольника, сложение по правилу параллелограмма, правило разности векторов, умножения вектора на число, скалярное произведение векторов и др.*

Сложение векторов по правилу треугольников

Рассмотрим два произвольных ненулевых вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$:



Требуется найти сумму данных векторов. Отложим вектор $\overline{b}$ от *конца* вектора $\overline{a}$:



Суммой векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ является вектор $\overline{c}$. Для лучшего понимания правила в него целесообразно вложить физический смысл: пусть некоторое тело совершило путь по вектору $\overline{a}$, а затем по вектору $\overline{b}$. Тогда сумма векторов $\overline{a}+\overline{b}$ представляет собой вектор результирующего пути $\overline{c}$ с началом в точке отправления и концом в точке прибытия. Аналогичное правило формулируется для суммы любого количества векторов. Как говорится, тело может пройти свой путь по зигзагу, а может – по результирующему вектору суммы.

Кстати, если вектор $\overline{b}$ отложить от *начала* вектора $\overline{a}$, то получится эквивалентное *правило параллелограмма* сложения векторов.

Умножение вектора на число

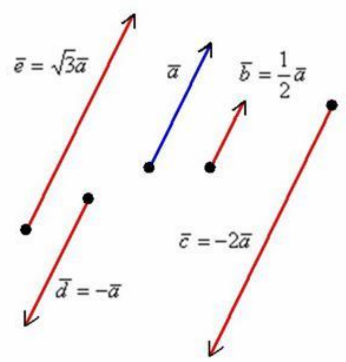
Сначала о коллинеарности векторов. Два вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Грубо говоря, речь идёт о параллельных векторах. Но применительно к ним всегда используют прилагательное «коллинеарные».

Если стрелки данных векторов направлены в одинаковом направлении, то такие векторы называются **сонаправленными**. Если стрелки смотрят в разные стороны, то векторы будут **противоположно направлены**.

Коллинеарность векторов записывают привычным значком параллельности: $\overline{a} \parallel \overline{b}$, при этом возможна детализация: $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ (векторы сонаправлены) или $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$ (векторы направлены противоположно).

Произведением ненулевого вектора $\overline{a}$ на число λ является такой вектор $\overline{b}$, длина которого равна $|\lambda| \cdot |\overline{a}|$, причём векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ сонаправлены при $\lambda \geq 0$ и противоположно направлены при $\lambda < 0$.

Правило умножения вектора на число легче понять с помощью рисунка:



Разбираемся более детально:

1) Направление. Если множитель λ отрицательный, то вектор **меняет направление** на противоположное.

2) Длина. Если множитель заключен в пределах $-1<\lambda<0$ или $0<\lambda<1$, то длина вектора <u>уменьшается</u>. Так, длина вектора $\bar{b}=\frac{1}{2}\bar{a}$ в два раза меньше длины вектора $\bar{a}$. Если множитель λ по модулю больше единицы, то длина вектора <u>увеличивается</u> в λ раз.

3) Обратите внимание, что **все векторы коллинеарны**, при этом один вектор выражен через другой, например, $\bar{c}=-2\bar{a}$. **Обратное тоже справедливо**: если один вектор можно выразить через другой, то такие векторы обязательно коллинеарны. Таким образом: **если мы умножаем вектор на число, то получится коллинеарный** (по отношению к исходному) **вектор**.

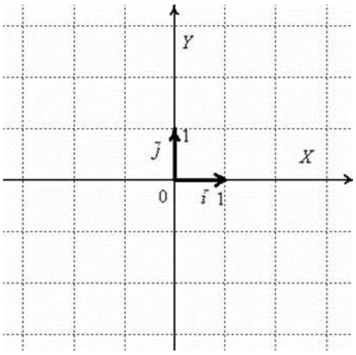
4) Векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{e}$ сонаправлены. Векторы $\bar{c}$ и $\bar{d}$ также сонаправлены. Любой вектор первой группы противоположно направлен по отношению к любому вектору второй группы.

Какие векторы являются равными?

Два вектора равны, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину.

Координаты вектора на плоскости и в пространстве

Первым пунктом рассмотрим векторы на плоскости. Изобразим декартову прямоугольную систему координат и от начала координат отложим **единичные** векторы $\bar{i}$ и $\bar{j}$:



Векторы $\bar{i}$ и $\bar{j}$ **ортогональны**. Ортогональны = Перпендикулярны.

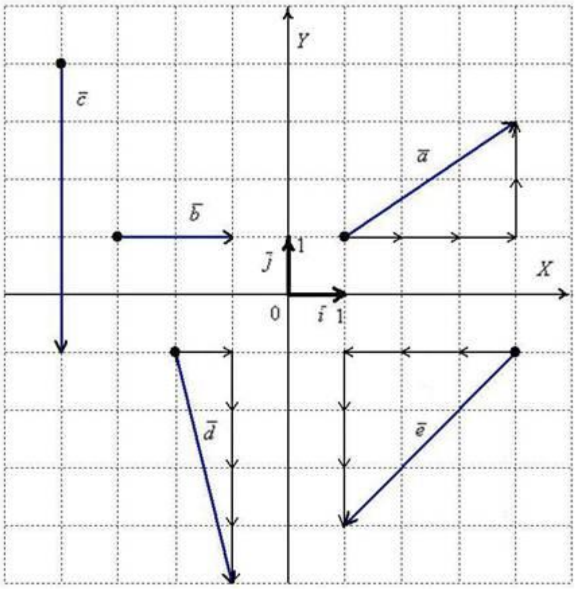
Обозначение: ортогональность векторов записывают привычным значком перпендикулярности, например: $\bar{i}\perp\bar{j}$.

Рассматриваемые векторы называют **координатными векторами** или **ортами**. Данные векторы образуют **базис** на плоскости.

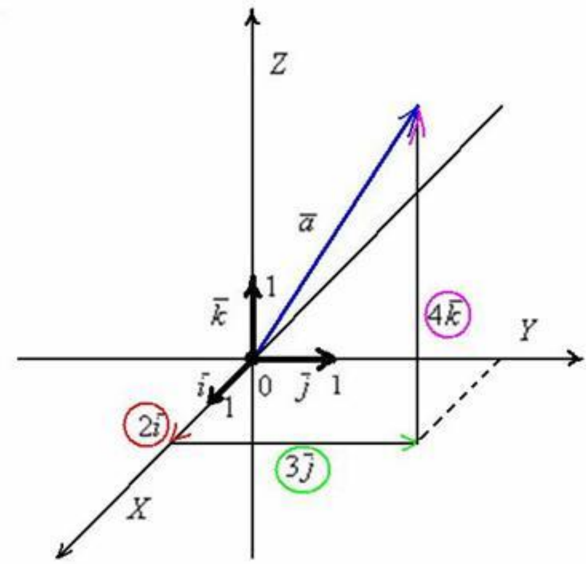
Иногда построенный базис называют *ортонормированным* базисом плоскости: «орто» – потому что координатные векторы ортогональны, прилагательное «нормированный» означает единичный, т.е. длины векторов базиса равны единице.

Обозначение: базис обычно записывают в круглых скобках, внутри которых **в строгой последовательности** перечисляются базисные векторы, например: $(\bar{i};\bar{j})$. Координатные векторы **нельзя** переставлять местами.

Любой вектор $\bar{v}$ плоскости **единственным образом** выражается в виде: $\bar{v}=v_1\cdot\bar{i}+v_2\cdot\bar{j}$, где v_1, v_2 – **числа**, которые называются **координатами вектора** в данном базисе. А само выражение $\bar{v}=v_1\cdot\bar{i}+v_2\cdot\bar{j}$ называется **разложением вектора $\bar{v}$ по базису $(\bar{i};\bar{j})$**.



С координатами на плоскости разобрались. Теперь рассмотрим векторы в трехмерном пространстве, здесь практически всё так же! Только добавится ещё одна координата.



Перед вами *ортонормированный* базис $(\bar{i};\bar{j};\bar{k})$ трехмерного пространства и прямоугольная система координат, единичные векторы $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ данного базиса попарно ортогональны: $\bar{i} \perp \bar{j}, \bar{i} \perp \bar{k}$ и $\bar{j} \perp \bar{k}$. Ось OX наклонена под углом 45 градусов только для того, чтобы складывалось визуальное впечатление пространства.

Любой вектор $\bar{v}$ трехмерного пространства можно **единственным способом** разложить по ортонормированному базису $(\bar{i}; \bar{j}; \bar{k})$: $\bar{v} = v_1 \cdot \bar{i} + v_2 \cdot \bar{j} + v_3 \cdot \bar{k}$, где v_1, v_2, v_3 – координаты вектора $\bar{v}$ (числа) в данном базисе.

Пример с картинки: $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}$. Давайте посмотрим, как здесь работают правила действий с векторами. Во-первых, умножение вектора на число: $2\bar{i}$ (красная стрелка), $3\bar{j}$ (зеленая стрелка) и $4\bar{k}$ (малиновая стрелка). Во-вторых, перед вами пример сложения нескольких, в данном случае трёх, векторов: $2\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}$. Вектор суммы $\bar{a}$ начинается в исходной точке отправления (начало вектора $2\bar{i}$) и утыкается в итоговую точку прибытия (конец вектора $4\bar{k}$).

Аналогично плоскому случаю, помимо записи $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}$ широко используются версии со скобками: $\bar{a}(2; 3; 4)$ либо $\bar{a} = (2; 3; 4)$.

Если в разложении отсутствует один (или два) координатных вектора, то вместо них ставятся нули.

Примеры:

вектор $\bar{b} = -\bar{i} + 3\bar{k}$ ($\bar{b} = -\bar{i} + 0 \cdot \bar{j} + 3\bar{k}$) – запишем $\bar{b}(-1; 0; 3)$;

вектор $\bar{c} = 2\bar{j} - 5\bar{k}$ ($\bar{c} = 0 \cdot \bar{i} + 2\bar{j} - 5\bar{k}$) – запишем $\bar{c}(0; 2; -5)$;

вектор $\bar{d} = 3\bar{k}$ ($\bar{d} = 0 \cdot \bar{i} + 0 \cdot \bar{j} + 3\bar{k}$) – запишем $\bar{d}(0; 0; 3)$.

Базисные векторы записываются следующим образом:

$\bar{i}(1; 0; 0)$

$\bar{j}(0; 1; 0)$

$\bar{k}(0; 0; 1)$

Действия с векторами в координатах

Как найти вектор по двум точкам?

Если даны две точки плоскости $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то вектор $\overline{AB}$ имеет следующие координаты:

$\overline{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$

Если даны две точки пространства $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то вектор $\overline{AB}$ имеет следующие координаты:

$\overline{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$

То есть, **из координат конца вектора** нужно вычесть соответствующие координаты **начала вектора**.

Пример 1

Даны две точки плоскости $A(2;\,1)$ и $B(-2;\,3)$. Найти координаты вектора $\overline{AB}$

Решение: по соответствующей формуле:
$\overline{AB}(-2-2;\,3-1)=\overline{AB}(-4;\,2)$

Ответ: $\overline{AB}(-4;\,2)$

Обязательно нужно понимать **различие между координатами точек и координатами векторов**:

Координаты точек – это обычные координаты в прямоугольной системе координат. Каждая точка обладает строгим местом на плоскости, и перемещать их куда-либо нельзя.

Координаты же вектора – это его разложение по базису $(\bar{i};\,\bar{j})$, в данном случае $\overline{AB}=-4\bar{i}+2\bar{j}$.

Записи координат точек и координат векторов вроде бы схожи: $A(2;\,1)$, $B(-2;\,3)$, $\overline{AB}(-4;\,2)$, а **смысл координат** абсолютно **разный**, и вам следует хорошо понимать эту разницу. Данное отличие, разумеется, справедливо и для пространства.

Пример 2 Найти координаты вектора АВ, если А(1; 4; 5), В(3; 1; 1).

Решение: АВ = (3 - 1; 1 - 4; 1 – 5) = (2; -3; -4).

Как найти длину отрезка?

Если даны две точки пространства $A(x_1;\,y_1;\,z_1)$ и $B(x_2;\,y_2;\,z_2)$, то **длину** отрезка AB можно вычислить по формуле $|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

Если даны две точки пространства $A(x_1;\,y_1;\,z_1)$ и $B(x_2;\,y_2;\,z_2)$, то длину отрезка AB можно вычислить по формуле $|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

Пример 3

Даны точки $A(-3;\,5)$ и $B(1;\,-3)$. Найти длину отрезка AB.

Решение: по соответствующей формуле:
$|AB|=\sqrt{(1-(-3))^2+(-3-5)^2}=\sqrt{4^2+(-8)^2}=\sqrt{16+64}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

Ответ: $|AB| = 4\sqrt{5}$ ед. $\approx 8{,}94$ ед.

Пример 4

Даны точки $A(2;\,3;\,-1)$ и $B(-5;\,3;\,0)$. Найти длину отрезка AB.

По соответствующей формуле:

$$|AB| = \sqrt{(-5-2)^2 + (3-3)^2 + (0-(-1))^2} = \sqrt{(-7)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{49+0+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Ответ: $|AB| = 5\sqrt{2}$ ед. $\approx 7{,}07$ ед.

Как найти длину вектора?

Если дан вектор плоскости $\bar{v}(v_1;\,v_2)$, то его длина вычисляется по формуле $|\bar{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

Если дан вектор пространства $\bar{v}(v_1;\,v_2;\,v_3)$, то его длина вычисляется по формуле $|\bar{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.

Данные формулы (как и формулы длины отрезка) легко выводятся с помощью небезызвестной теоремы Пифагора.

Пример 5

Даны точки $A(-3;\,5)$ и $B(1;\,-3)$. Найти длину вектора $\overline{AB}$.

Решение:

Сначала найдём вектор $\overline{AB}$:

$$\overline{AB}(1-(-3);\,-3-5) = \overline{AB}(4;\,-8)$$

По формуле $|\bar{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ вычислим длину вектора:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

Ответ: $|\overline{AB}| = 4\sqrt{5}$ ед. $\approx 8{,}94$ ед.

Пример 6

Даны векторы $\bar{a}(-2;\,6)$, $\bar{b}(-4\sqrt{2};\,2;\,0)$, $\bar{c} = 4\bar{i} + \sqrt{2}\bar{j}$ и $\bar{d} = 4\bar{j} - 3\bar{k}$. Найти их длины.

Решение:
Вычислим длины векторов:

$$|\bar{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 6^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}\ ed. \approx 6{,}32\ ed.$$

$$|\bar{b}| = \sqrt{(-4\sqrt{2})^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{32+4+0} = \sqrt{36} = 6\ ed.$$

$$|\bar{c}| = \sqrt{4^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{16+2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}\ ed. \approx 4{,}24\ ed.$$

$$|\bar{d}| = \sqrt{0^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{0+16+9} = \sqrt{25} = 5\ ed.$$

Действия с векторами в координатах

В первой части урока мы рассматривали правила сложения векторов и умножения вектора на число. Но рассматривали их с принципиально-графической точки зрения. Посмотрим, как данные правила работают аналитически – когда заданы координаты векторов.

1. ***Сложение*** двух векторов производится покоординатно, то есть если

$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$, то $c = \{x_3; y_3; z_3\} = \{x_1; y_1; z_1\} + \{x_2; y_2; z_2\} = \{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$.

Для того, чтобы сложить векторы, нужно **сложить их соответствующие координаты**:

Данная формула имеет место для произвольного конечного числа слагаемых.

2. ***Вычитание*** двух векторов производится покоординатно, аналогично сложению, то есть если $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$, то

$\bar{c} = \{x_3; y_3; z_3\} = \{x_1; y_1; z_1\} - \{x_2; y_2; z_2\} = \{x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2\}$.

2. ***Умножение вектора на число λ*** производится покоординатно:

$\lambda \cdot \bar{a} = \{\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1\}$.

Для того чтобы вектор умножить на число , нужно каждую координату данного вектора умножить на это число :

При $\lambda > 0$ – вектор $\lambda\bar{a}$ сонаправлен $\bar{a}$; $\lambda < 0$ – вектор $\lambda\bar{a}$ противоположно направлен $\bar{a}$; $|\lambda| > 1$ – длина вектора $\bar{a}$ увеличивается в λ раз; $|\lambda| < 1$ – длина вектора $\bar{a}$ уменьшается в λ раз.

Пример 7. Даны два вектора: $\bar{a} = (2; -1; 4)$ и $\bar{b} = (-3; 5; -2)$
Найти сумму, разность этих векторов и произведение вектора *a* на число 3.

Решение: $\bar{a} + \bar{b} = (2 + (-3);\ -1 + 5;\ 4 + (-2)) = (-1; 4; 2)$

$\bar{a} - \bar{b} = (2 - (-3);\ -1 - 5;\ 4 - (-2)) = (5; -6; 6)$

$3 \cdot \bar{a} = (3 \cdot 2; 3 \cdot (-1); 3 \cdot 4) = (6;\ -3; 12)$

Пример 8

Даны векторы $\bar{a}(1; -2)$ и $\bar{b}(2; 3)$. Найти $2\bar{a}$, $\bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{a} - \bar{b}$

Решение:

$2\overline{a} = 2(1; -2) = (2; -4)$

$\overline{a} + \overline{b} = (1; -2) + (2; 3) = (1 + 2; -2 + 3) = (3; 1)$

$\overline{a} - \overline{b} = (1; -2) - (2; 3) = (1 - 2; -2 - 3) = (-1; -5)$

Ответ: $2\overline{a} = (2; -4), \quad \overline{a} + \overline{b} = (3; 1), \quad \overline{a} - \overline{b} = (-1; -5)$

<u>Пример 9</u>

Даны векторы $\overline{a}(0; 4; -7)$ и $\overline{b}(7; -9; 1)$. Найти $3\overline{a} - 2\overline{b}$ и $-\overline{a} + 4\overline{b}$

Решение: Для действий с векторами справедлив обычный алгебраический приоритет: сначала умножаем, потом складываем:

$3\overline{a} - 2\overline{b} = 3(0; 4; -7) - 2(7; -9; 1) = (0; 12; -21) - (14; -18; 2) =$
$= (0 - 14; 12 - (-18); -21 - 2) = (-14; 30; -23)$

$-\overline{a} + 4\overline{b} = -(0; 4; -7) + 4(7; -9; 1) = (0; -4; 7) + (28; -36; 4) =$
$= (0 + 28; -4 - 36; 7 + 4) = (28; -40; 11)$

Ответ: $3\overline{a} - 2\overline{b} = (-14; 30; -23), \quad -\overline{a} + 4\overline{b} = (28; -40; 11)$

2.Ответить на контрольные вопросы (устно)

1. Как найти сумму векторов, заданных координатами?
2. Как найти разность векторов, заданных координатами?
3. Как найти произведение вектора на число?
4. Как вычислить координаты вектора?
5. Как найти длину вектора?
6. Назовите условие равенства двух векторов.
7. Назовите условие коллинеарности векторов.

3. Выполнить упражнение (в рабочей тетради):

Даны векторы $\bar{a} = (-2; 4; 5)$ и $\bar{b} = (3; \ -5; \ -1)$. Найти

а) длину каждого из векторов;

б) векторы $2\bar{a} - 4\bar{b}$ и $-3\bar{a} - \bar{b}$.