<u>Тема:</u> Системы линейных уравнений. Совместные определенные, совместные неопределенные, несовместные системы линейных уравнений. Решение систем линейных уравнений.

1. **Прослушайте звуковой файл https://yadi.sk/d/c4WotflQzd4r1g , одновременно читая лекцию.**
2. **Составить краткий конспект (записать определения, примеры).**

Теория матриц и определителей находит своё применение при решении систем линейных алгебраических уравнений, к которым приводит множество прикладных задач.

Что в данном случае обозначает математическое слово «линейных»? Это значит, что в уравнения системы **все** переменные входят **в первой степени**: $x, y, z, \ldots$.

В высшей математике для обозначения переменных используются не только буквы $x, y, z, \ldots$. Довольно популярный вариант – переменные с индексами: $x_1, x_2, x_3, \ldots$.

Системой линейных алгебраических уравнений, содержащей **m** уравнений с **n** неизвестными называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Числа a_{ij} – коэффициенты системы, где $i = 1,..m$, $j = 1,..n$. b_i – свободные члены.

Что значит решить систему линейных уравнений? **Решить систему уравнений – это значит найти множество её решений. Решение системы представляет собой набор значений всех входящих в неё переменных, который обращает КАЖДОЕ уравнение системы в верное равенство.**

Решением системы линейных уравнений называется совокупность **n** чисел $(\overline{x}_1; \overline{x}_2; \ldots; \overline{x}_n)$, которые, будучи подставлены вместо неизвестных в уравнения, обращают эти уравнения в тождества.

Система уравнений называется **совместной,** если она имеет хотя бы одно решение $(\overline{x}_1; \overline{x}_2; \ldots; \overline{x}_n)$. Если же система не имеет ни одного решения, то она называется **несовместной.**

Совместная система называется **определенной**, если она имеет только одно решение, и **неопределенной**, если она имеет больше одного решения. В последнем случае каждое ее решение называется частным решением системы. Совокупность всех частных решений называется общим решением.

Для нахождения решения системы линейных уравнений используют:

1.Метод Крамера

2. Метод Гаусса

3.Матричный метод.

Рассмотрим метод Крамера.

Пусть мы имеем систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Основная матрица А такой системы квадратная. Определитель этой матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

называется определителем системы. Если определитель системы отличен от нуля, то система называется **невырожденной**.

Если $\Delta=0$, то система имеет бесконечно много решений или несовместна (не имеет решений). В этом случае правило Крамера не поможет, нужно использовать **метод Гаусса**.

Найдем решение данной системы уравнений в случае $\Delta \neq 0$ с помощью формул Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}\ ; \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}\ ; \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}, \text{ где}$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{23} & b_3 \end{vmatrix}$$

$\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$- вспомогательные определители. Они получены из основного определителя системы, путем замены в нем соответственно первого, второго и третьего столбцов на столбец из свободных членов.

ПРИМЕР 1 Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -7 \end{cases}$$

Составим определитель системы :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot 4\cdot(-3) + 2\cdot(-1)\cdot(-1) + 5\cdot(-3)\cdot 3 - (3\cdot 4\cdot(-1) + 1\cdot(-1)\cdot(-3) + 2\cdot 5\cdot(-3)) = -16$$

т.к. определитель $\Delta \neq 0$ система имеет единственное решение.

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ -7 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 3\cdot 4\cdot(-3) + 2\cdot(-1)\cdot(-1) + 5\cdot(-3)\cdot(-7) - (-7)\cdot 4\cdot(-1) - 2\cdot 5\cdot(-3) - 3\cdot(-3)\cdot(-1) = 64$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & -7 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot(-3) + 3\cdot(-3)\cdot 3 + 2\cdot(-7)\cdot(-1) - 3\cdot 2\cdot(-1) - 2\cdot 3\cdot(-3) - 1\cdot(-3)\cdot(-7) = -16 \quad ,$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 1\cdot 4\cdot(-7) + 2\cdot(-1)\cdot 3 + 5\cdot 2\cdot 3 - 3\cdot 4\cdot 3 - 2\cdot 5\cdot(-7) - 1\cdot 2\cdot(-1) = 32$$

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{64}{-16} = -4 \qquad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-16}{-16} = 1 \qquad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{32}{-16} = -2$$

Итак, (-4; 1; -2) – единственное решение системы

В конце решения системы надо обязательно делать проверку, подставив найденные значения неизвестных в уравнения системы, убедиться в том, что они обращают уравнения в верные числовые равенства.

ПРИМЕР 2. Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 2 \end{cases}.$$

Находим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 2+6+12+1-16+9 =$$
$$= 14 \neq 0.$$

Следовательно, система является определённой. Для нахождения её решения вычисляем вспомогательные определители

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 14$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -14.$$

По формулам Крамера находим:

$$x_1 = \frac{14}{14} = 1,$$

$$x_2 = \frac{0}{14} = 0,$$

$$x_3 = \frac{-14}{14} = -1.$$

Итак, (1; 0; -1) – единственное решение системы.

Если в системе линейных уравнений в одном или нескольких уравнениях отсутствуют какие-либо переменные, то в определителе соответствующие им элементы равны нулю! Таков следующий пример.

<u>ПРИМЕР 3.</u> Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 = 8 \end{cases}.$$

Находим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -6 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0-18-4+3-12-0=-31.$$

Итак, определитель не равен нулю, следовательно, система является определённой. Для нахождения её решения вычисляем определители при неизвестных

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -6 \\ 8 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0-48+2+8-24=-62.$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -6 \\ 3 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0+16-36+3+48+0=$$
$$=31.$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 8 \end{vmatrix} = -8-3-8+6-2-16=$$
$$=-31.$$

По формулам Крамера находим:

$$x_1 = \frac{-62}{-31} = 2,$$

$$x_2 = \frac{31}{-31} = -1,$$

$$x_3 = \frac{-31}{-31} = 1.$$

Итак, решение системы - (2; -1; 1).

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Метод Гаусса применяется для решения любых систем. И это достоинство метода. *Метод Гаусса (или метод последовательного исключения переменных)* заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

Переход данной системы к равносильной ей системе называется *прямым ходом* метода Гаусса, а нахождение переменных из полученной системы – *обратным ходом.* Преобразования системы удобно проводить не с самими уравнениями, а с матрицей их коэффициентов. Рассмотрим матрицу

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

называемую ***расширенной матрицей системы,*** ибо в неё, кроме основной матрицы системы *A,* дополнительно включен столбец свободных членов.

Вертикальная черта внутри матрицы не несёт никакого математического смысла – это просто отчеркивание для удобства оформления.

Рассмотрим простейшую систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными $\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x + y = -7 \end{cases}$ и решим ее методом Гаусса.

На первом этапе нужно записать *расширенную матрицу системы*:

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right)$. По какому принципу записаны коэффициенты?

Матрица системы *– это матрица, составленная только из коэффициентов при неизвестных, в данном примере матрица системы:* $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Расширенная матрица системы *– это та же матрица системы плюс столбец свободных членов, в данном случае:* $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right)$.

После того, как расширенная матрица системы записана, с ней необходимо выполнить некоторые действия, которые также называются *элементарными преобразованиями*.

Существуют следующие элементарные преобразования:

1) **Строки** матрицы **можно переставлять** местами. Например, в рассматриваемой матрице можно безболезненно переставить первую и вторую строки: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & -5 \end{array}\right)$

2) Если в матрице есть (или появились) пропорциональные (как частный случай – одинаковые) строки, то следует **удалить** из матрицы все эти строки кроме одной.

Рассмотрим, например матрицу $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 6 \end{array}\right)$. В данной матрице последние три строки пропорциональны, поэтому достаточно оставить только одну из них: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right)$.

3) Если в матрице в ходе преобразований появилась нулевая строка, то ее также следует **удалить**.

4) Строку матрицы можно **умножить (разделить)** на любое число, <u>отличное от нуля</u>. Рассмотрим, например, матрицу $\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 9 & 15 \\ 0{,}5 & 0 & 2{,}5 \end{array}\right)$. Здесь целесообразно первую строку разделить на –3, а вторую строку – умножить на 2: $\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 9 & 15 \\ 0{,}5 & 0 & 2{,}5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -5 \\ 1 & 0 & 5 \end{array}\right)$. Данное действие очень полезно, поскольку упрощает дальнейшие преобразования матрицы.

5) Это преобразование вызывает наибольшие затруднения, но на самом деле ничего сложного тоже нет. К строке матрицы можно **прибавить другую строку, умноженную на число**, отличное от нуля. Рассмотрим нашу матрицу из практического примера: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right)$.

Умножаем первую строку на –2: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right)$, и **ко второй строке прибавляем первую строку умноженную на 2** $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$

Теперь первую строку можно разделить на -2

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$. Как видите, строка, которую ПРИБАВЛЯ**ЛИ** – <u>не изменилась</u>. **Всегда** меняется строка, К КОТОРОЙ ПРИБАВЛЯ**ЮТ**.

На практике так подробно, конечно, не расписывают, а пишут короче:

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$

Еще раз: ко второй строке **прибавили первую строку, умноженную на –2**.

Элементарные преобразования не меняют решение системы уравнений

Вернемся к нашей системе $\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x + y = -7 \end{cases}$.

Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к *ступенчатому виду*:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

(1) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на –2. И снова: почему первую строку умножаем именно на –2? Для того чтобы внизу получить ноль, а значит, избавиться от одной переменной во второй строке.

(2) Делим вторую строку на 3.

Цель элементарных преобразований – привести матрицу к ступенчатому виду: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$. В оформлении задания прямо так и отчеркивают простым карандашом «лестницу», а также обводят кружочками числа, которые располагаются на «ступеньках».

В результате элементарных преобразований получена *эквивалентная* исходной система уравнений:

$$\begin{cases} x - y = -5 \\ \quad y = 1 \end{cases}$$

Теперь систему нужно «раскрутить» в обратном направлении – снизу вверх, этот процесс называется *обратным ходом метода Гаусса*.

В нижнем уравнении у нас уже готовый результат: $y = 1$.

Рассмотрим первое уравнение системы $x - y = -5$ и подставим в него уже известное значение «игрек»:

$x - 1 = -5$

$x = -4$

Ответ: $x = -4, y = 1$

Рассмотрим наиболее распространенную ситуацию, когда методом Гаусса требуется решить систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными.

Пример 1

Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x+2y-5z=-1 \\ 2x-y+3z=13 \\ x+2y-z=9 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

Наша цель – с помощью элементарных преобразований привести матрицу к ступенчатому виду. С чего начать действия?

Сначала смотрим на левое верхнее число:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

Почти всегда здесь должна находиться **единица**. Вообще говоря, устроит и –1 (а иногда и другие числа), но как-то так традиционно сложилось, что туда обычно помещают единицу. Как организовать единицу? Смотрим на первый столбец – готовая единица у нас есть! Преобразование первое: меняем местами первую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Теперь первая строка у нас останется неизменной до конца решения.

Единица в левом верхнем углу организована. Теперь нужно получить нули вот на этих местах:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Нули получаем как раз с помощью «трудного» преобразования. Сначала разбираемся со второй строкой (2, –1, 3, 13). Что нужно сделать, чтобы на первой позиции получить ноль? Нужно **ко второй строке прибавить первую строку, умноженную на –2**. Мысленно или на черновике умножаем первую строку на –2: (–2, –4, 2, –18). И последовательно проводим (опять же мысленно или на черновике) сложение, **ко второй строке прибавляем первую строку, уже умноженную на –2**:

Результат записываем во вторую строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Аналогично разбираемся с третьей строкой (3, 2, –5, –1). Чтобы получить на первой позиции ноль, нужно **к третьей строке прибавить первую строку, умноженную на –3**. Мысленно или на черновике умножаем первую строку на –3: (–3, –6, 3, –27). И **к третьей строке прибавляем первую строку, умноженную на –3**:
Результат записываем в третью строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

На практике эти действия обычно выполняются устно и записываются в один шаг:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

Далее нужно получить единицу на следующей «ступеньке»:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

В данном примере это сделать легко, вторую строку делим на –5 (поскольку там все числа делятся на 5 без остатка). Заодно делим третью строку на –2, ведь чем меньше числа, тем проще решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right)$$

На заключительном этапе элементарных преобразований нужно получить еще один ноль здесь:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right)$$

Для этого **к третьей строке прибавляем вторую строку, умноженную на –2**:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 2 & -5 & -1\\ 2 & -1 & 3 & 13\\ 1 & 2 & -1 & 9\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 9\\ 2 & -1 & 3 & 13\\ 3 & 2 & -5 & -1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 9\\ 0 & -5 & 5 & -5\\ 0 & -4 & -2 & -28\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 9\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 14\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 9\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 12\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 9\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 4\end{array}\right)$$

Последнее выполненное действие – делим третью строку на 3.

В результате элементарных преобразований получена эквивалентная исходной система линейных уравнений:

$$\begin{cases}x+2y-z=9\\ \quad\;\; y-z=1\\ \qquad\quad z=4\end{cases}$$

Теперь в действие вступает обратный ход метода Гаусса. Уравнения «раскручиваются» снизу вверх.

В третьем уравнении у нас уже готовый результат: $z=4$

Смотрим на второе уравнение: $y-z=1$. Значение «зет» уже известно, таким образом:

$y-4=1$

$y=5$

И, наконец, первое уравнение: $x+2y-z=9$. «Игрек» и «зет» известны, дело за малым:

$x+2\cdot 5-4=9$

$x+6=9$

$x=3$

Ответ: $x=3, y=5, z=4$

Как уже неоднократно отмечалось, для любой системы уравнений можно и нужно сделать проверку найденного решения, благо, это несложно и быстро.

<u>Пример 2</u>

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases}4x_1+2x_2-x_3=1\\ 5x_1+3x_2-2x_3=2\\ 3x_1+2x_2-3x_3=0\end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Смотрим на левую верхнюю «ступеньку». Там у нас должна быть единица. Проблема состоит в том, что в первом столбце единиц нет вообще, поэтому перестановкой строк ничего не решить. В таких случаях единицу нужно организовать с помощью элементарного преобразования.

(1) **К первой строке прибавляем вторую строку, умноженную на –1**. То есть, мысленно умножили вторую строку на –1 и выполнили сложение первой и второй строки, при этом вторая строка у нас не изменилась.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Теперь слева вверху «минус один», что нас вполне устроит. Кто хочет получить +1, может выполнить дополнительное телодвижение: умножить первую строку на –1 (сменить у неё знак).

Дальше алгоритм работает уже по накатанной схеме:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

(2) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на 5. К третьей строке прибавили первую строку, умноженную на 3.

(3) Первую строку умножили на –1, в принципе, это для красоты. У третьей строки также сменили знак и переставили её на второе место, таким образом, на второй «ступеньке у нас появилась нужная единица.

(4) К третьей строке прибавили вторую строку, умноженную на 2.

(5) Третью строку разделили на 3.

Заряжаем обратный ход, в оформлении примеров часто не переписывают саму систему, а уравнения «берут прямо из приведенной матрицы».

$x_3 = 1$

$x_2 = 3$

$x_1 + x_2 - x_3 = 1 \Rightarrow x_1 + 3 - 1 = 1 \Rightarrow x_1 = -1$

Ответ: $x_1 = -1, x_2 = 3, x_3 = 1$.

3. Выполнить практическую работу (по вариантам):

Вариант 1

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$$

Вариант 2

Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$$

Вариант 3

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 31 \\ 5x + y + 2z = 29 \\ 3x - y + z = 10 \end{cases}$$

Вариант 4

Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ -2x + y + z = 3 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

Вариант 5

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ -2x + 3y - 3z = -5 \\ 3x - 4y + 5z = 10 \end{cases}$$

Вариант 6

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - y + 2z = 6 \\ x + y + 5z = -1 \end{cases}$$

В каждом из вариантов на оценку «5» систему нужно решить обоими методами – методом Крамера и методом Гаусса, на любую другую оценку систему решить достаточно только одним (любым, по выбору) методом.

1 вариант	Баганов К., Бублик В, Киселев А.
2 вариант	Козлов М., Мехоношина В., Молодцова А.
3 вариант	Силантьев К., Фатуллаев Р., Федотов Н.
4 вариант	Филиппова К., Щекоткин Д., Крайнов А.
5 вариант	Ипполитов Е., Князев А., Мухин М., Нестеров А.
6 вариант	Осипов А., Царев Н., Тюленев Д., Штанько А.

Все практические работы выполнить на отдельных листках (оформлять аккуратно, разборчивым почерком) сфотографировать и отправить на электронную почту: **olga.georg.gor@yandex.ru**