https://yadi.sk/d/sdYkdS61IDVHJg

Тема: Теоремы сложения и умножения вероятностей.

I. *Изучить теоретический материал, составить конспект (записать определения, формулы, примеры).*

1) *Произведением двух событий* А и В называется событие С=АВ, состоящее в совместном выполнении события А и события В. Ключевое слово «и».

Например, если А – деталь годная, В – деталь окрашенная, то АВ – деталь годна и окрашена.

Произведением нескольких событий называют событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Например, если А, В, С – появление «герба» соответственно в первом, втором и третьем бросаниях монеты, то «АВС» – выпадение «герба» во всех трех испытаниях.

Два события называются **независимыми**, если вероятность появления одного из них не влияет на вероятность появления другого события, в противном случае события **зависимы**.

Условной вероятностью называют вероятность события В, вычисленную в предположении, что событие А уже наступило.

Условная вероятность события В при условии, что событие А уже наступило, по определению, равна: $P_A(B) = P(AB)/P(A)$ где $(P(A)>0)$.

Пример 1. В урне 3 белых и 3 черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании (событие В), если при первом испытании был извлечен черный шар (событие А).

Решение. После первого испытания в урне осталось 5 шаров, из них 3 белых. Искомая условная вероятность $P_A(B) = \frac{3}{5}$

Этот же результат можно получить по формуле $P_A(B) = \frac{P(AB)}{p(A)}$. Действительно, вероятность появления белого шара при первом испытании $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Найдем вероятность Р (АВ) того, что в первом испытании появится черный шар, а во втором—белый. Общее число исходов — совместного появления двух шаров, безразлично какого цвета, равно числу размещений

$A_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!} = 5 \cdot 6 = 30$ Из этого числа исходов событию АВ благоприятствуют

$3 \cdot 3 = 9$ исходов. Следовательно, $P(AB) = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$ Искомая условная вероятность

$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}$ Как видим, получен прежний результат.

Теорема умножения вероятностей (для зависимых событий).

Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило: $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) -$ **для зависимых событий.**

Пример 2. У сборщика имеется 3 конусных и 7 эллиптических валиков. Сборщик взял один валик, а затем второй. Найти вероятность того, что первый из взятых валиков — конусный, а второй — эллиптический.

Решение. Вероятность того, что первый валик окажется конусным (событие А) P(A)=3/10. Вероятность того, что второй валик окажется эллиптическим (событие B), вычисленная в предположении, что первый валик— конусный, т. е. условная вероятность $P_A(B)=7/9$. По теореме умножения, искомая вероятность $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{30}$

Пример 3. В урне 5 белых, 4 черных и 3 синих шара. Каждое испытание состоит в том, что наудачу извлекают один шар, не возвращая его обратно. Найти вероятность того, что при первом испытании появится белый шар (событие А), при втором — черный (событие В) и при третьем—синий (событие С).

Решение. Вероятность появления белого шара в первом испытании P(A)=5/12. Вероятность появления черного шара во втором испытании, вычисленная в предположении, что в первом испытании появился белый шар, т. е. условная вероятность $P_A(B)=4/11$. Вероятность появления синего шара в третьем испытании, вычисленная в предположении, что в первом испытании появился белый шар, а во втором — черный, т. е. условная вероятность $P_{AB}(C)=3/10$. Искомая вероятность

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{22}.$$

Теорема умножения вероятностей (для независимых событий).

Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий: $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) -$ **для независимых событий;**

2) ***Суммой двух событий*** А и В называется событие С=А+В, состоящее в появлении или события А, или события В, или обоих вместе. Ключевое слово «или» («либо»).

Например, если из орудия произведены два выстрела и А – попадание при первом выстреле, В – попадание при втором выстреле, то А+В – попадание при первом выстреле, или при втором, или в обоих выстрелах.

Суммой нескольких событий называют событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий.

Два события называются несовместными, если появление одного из них исключает появление другого события в одном и том же опыте; в противном случае события называются совместными.

Пример 4. При бросании игральной кости выпадение 3 очков и 6 очков события несовместные, так как они одновременно не могут произойти в одном и том же опыте.

Пример 5. А — появление четырех очков при бросании игральной кости; В - появление четного числа очков. События А и В совместные, так появление одного из них не исключает появление другого в одном и том же испытании.

Теорема сложения вероятностей (для несовместных событий).

Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий: P(A+B) = P(A)+P(B).

Пример 6. В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Найти вероятность появления цветного шара.

Решение. Появление цветного шара означает появление либо красного, либо синего шара. Вероятность появления красного шара (событие А): Р (А) = 10/30 = 1/3. Вероятность появления синего шара (событие В): Р (В) = 5/30 = 1/6. События А и В несовместны (появление шара одного цвета исключает появление шара другого цвета), поэтому теорема сложения применима. Искомая вероятность: Р (А + В) = Р (А) + Р (В) = 1/3 + 1/6 = 0,5.

Пример 7. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на 3 области. Вероятность попадания в первую область равна 0,45, во вторую – 0,35. Найти вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадет либо в первую, либо во вторую область.

Решение. Событие А – «стрелок попал в первую область» и В – «стрелок попал во вторую область» — несовместны (попадание в одну область исключает попадание в другую), поэтому теорема сложения применима. Искомая вероятность: Р (А + В) = Р (А) + Р (В) = 0,45 + 0,35 = 0,80.

Теорема сложения вероятностей (для совместных событий).

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

P(A+B) = P(A) + P(B) – P(AB)

Пример 8. Вероятности попадания в цель при стрельбе первого и второго орудий соответственно равны: $p_1 = 0{,}7$; $p_2 = 0{,}8$. Найти вероятность попадания при одном залпе (из обоих орудий) хотя бы одним из орудий.

Решение. Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результата стрельбы из другого орудия, поэтому события А (попадание первого орудия) и В (попадание второго орудия) независимы. Вероятность события АВ (оба орудия дали попадание) Р (АВ) = Р (А)*Р(В) = 0,7*0,8 = 0,56. Искомая вероятность Р(А+В) = Р(А) + Р(В)—Р(АВ) = 0,7 + 0,8 — 0,56 =0,94.

Пример 9. В урне 3 красных и 4 белых шара, 5 красных, 2 белых и 6 черных кубов. Из урны наудачу вынимается одно изделие. Найти вероятность того, что выбранное изделие а) либо белое, либо черное; б) либо красное, либо куб.

Решение: а) Рассмотрим события:

А — изделие белое; $P(A)=\frac{6}{20}$, так как всего изделий 20, а белых шесть.

В — изделие черное, $P(B)=\frac{6}{20}$.

Событие C — изделие либо белое, либо черное можно представить как сумму событий A и B. Следовательно, $P(C)=P(A+B)$.

События A и B несовместны, так как вынутое изделие не может быть одновременно и белым и черным. Тогда $P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{6}{20}+\frac{6}{20}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$.

б) Введем события D — изделие красное; $P(D)=\frac{8}{20}$;

E — изделие куб; $P(E)=\frac{13}{20}$;

F — изделие либо красное, либо куб; $P(F)=P(D+E)$.

События D и E совместны, так как вынутое изделие может оказаться красным кубом $P(D\cdot E)=\frac{5}{20}$. Тогда

$$P(F)=P(D+E)=P(D)+P(E)-P(D\cdot E)=\frac{8}{20}+\frac{13}{20}-\frac{5}{20}=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}.$$

Пример 10. В ящике 10 деталей, 3 из которых бракованные. Наудачу вынимают два изделия. Найти вероятность того, что оба изделия бракованные, если первое изделие: а) возвращается в ящик; б) в ящик не возвращается.

Решение. Введем события A — первое изделие бракованное, $P(A)=\frac{3}{10}$;

B — второе изделие бракованное,

C — оба изделия бракованные.

Событие C представляет собой произведение событий A и B; C=AB.

а) Если первое изделие возвращается в ящик, то $P(B)=\frac{3}{10}$ вне зависимости от того, какое изделие было первое, то есть A и B — независимые события. Тогда $P(C)=P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{10}=\frac{9}{100}$.

б) Если изделие не возвращается, то вероятность события B будет меняться в зависимости от того, какое изделие было вынуто первым (бракованное или небракованное). Найдем вероятность события B в предположении, что первое изделие оказалось бракованным. $P_A(B)=\frac{2}{9}$, так как всего осталось 9 изделий, два из которых бракованные. Тогда $P(C)=P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}=\frac{1}{15}$.

<u>Пример 11.</u> Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадет: а) только один из стрелков; б) хотя бы один стрелок.

Решение. Рассмотрим события A_1 – первый стрелок попал; $P(A_1)=0,7$;

$\overline{A}_1$ – первый стрелок промахнулся; $P(\overline{A}_1)=0,3$;

A_2 – второй стрелок попал; $P(A_2)=0,8$;

$\overline{A}_2$ – второй стрелок промахнулся; $P(\overline{A}_2)=0,2$.

а) Событие B попал только один стрелок, используя алгебру событий, можно представить в виде $B=A_1\cdot\overline{A}_2+\overline{A}_1\cdot A_2$.

Тогда по теореме сложения вероятностей несовместных и умножения независимых событий имеем:

$$P(B)=P(A_1\cdot\overline{A}_2+\overline{A}_1\cdot A_2)=P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2)=0,7\cdot 0,2+0,3\cdot 0,8=0,14+0,24=0,38.$$

б) Событие C - попал хотя бы один стрелок - можно представить как сумму двух несовместных событий: B — попал только один стрелок и D- попали оба стрелка

$$P(C)=P(B+D)=P(B)+P(D)=0,38+P(A_1)\cdot P(A_2)=0,38+0,8\cdot 0,7=0,94.$$

Однако вероятность события C можно найти другим способом. Рассмотрим событие $\overline{C}$ – оба промахнулись,

$$P(\overline{C})=P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)=0,3\cdot 0,2=0,06.$$

Тогда $P(C)=1-P(\overline{C})=1-0,06=0,94$.

<u>Пример 12.</u> Вероятность выхода из строя хотя бы одного их трех станков в течение смены равна 0,488. Найти вероятность выхода из строя одного станка за смену, если вероятности выхода из строя каждого станка одинаковы.

Решение. Пусть А — выход из строя хотя бы одного станка. Тогда $\overline{A}$ – нормальная работа всех трех станков; $P(\overline{A}) = 1 - 0,488 = 0,512$. Обозначим через р вероятность нормальной работы каждого станка, тогда $p \cdot p \cdot p = 0,512$ или $p = 0,8$. Вероятность выхода из строя каждого станка вычисляется $q = 1 - p = 1 - 0,8 = 0,2$.

II. Решить задачи (в рабочей тетради):

1. В урне 5 белых и 7 черных шаров. Из урны вынимают два шара. Какова вероятность того, что оба шара будут белыми, если выемку производить: а) с возвращением; б) без возвращения.

2. Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы за определенный промежуток времени первого, второго и третьего элемента соответственно равны 0,6;0,7;0,8. Найти вероятности того, что за это время безотказно будут работать: а) только один элемент; б) только два элемента; в) все три элемента; г) хотя бы два элемента.