https://yadi.sk/d/K1qIepKWoAGJcA

Тема: Вероятность события. Вычисление вероятностей событий.

1. ***Изучить теоретический материал, составить конспект (записать определения, формулы, примеры).***

Вероятность события – это центральное понятие теории вероятностей.

Обозначения. Вероятность некоторого события A обозначается большой латинской буквой P, а само событие берётся в скобки, выступая в роли своеобразного аргумента.

Например:

$P(A_O)$ – вероятность того, что в результате броска монеты выпадет «орёл»;
$P(B_5)$ – вероятность того, что в результате броска игральной кости выпадет 5 очков;
$P(C_T)$ – вероятность того, что из колоды будет извлечена карта трефовой масти.

Также для обозначения вероятности широко используется маленькая буква p. В частности, можно отказаться от громоздких обозначений событий A_O, B_5, C_T и их вероятностей $P(A_O), P(B_5), P(C_T)$ в пользу следующей стилистики::

$p_O = \frac{1}{2}$ – вероятность того, что в результате броска монеты выпадет «орёл»;
$p_5 = \frac{1}{6}$ – вероятность того, что в результате броска игральной кости выпадет 5 очков;
$p_T = \frac{1}{4}$ – вероятность того, что из колоды будет извлечена карта трефовой масти.

Данный вариант популярен при решении практических задач, поскольку позволяет заметно сократить запись решения. Как и в первом случае, здесь удобно использовать «говорящие» подстрочные/надстрочные индексы.

Все уже давно догадались о числах, которые записаны выше, и сейчас мы узнаем, как они получились:

Классическое определение вероятности:

Вероятностью наступления события A в некотором испытании называют отношение $P(A) = \frac{m}{n}$, где:

n **– общее число всех равновозможных элементарных исходов этого испытания, которые образуют полную группу событий;**

m **– количество элементарных исходов, *благоприятствующих* событию A.**

При броске монеты может выпасть либо орёл, либо решка – данные события образуют полную группу, таким образом, общее число исходов $n = 2$; при этом, каждый из них элементарен и равновозможен. Событию A_O благоприятствует $m = 1$ исход (выпадение орла). По классическому определению вероятностей: $P(A_O) = \frac{m}{n} = \frac{1}{2}$.

Аналогично – в результате броска кубика может появиться $n=6$ элементарных равновозможных исходов, образующих полную группу, а событию B_5 благоприятствует единственный $m=1$ исход (выпадение пятёрки). Поэтому: $P(B_5)=\frac{m}{n}=\frac{1}{6}$.

Особое внимание третьему примеру. Здесь будет некорректным сказать *«раз в колоде 4 масти, то вероятность извлечения трефы* $P(C_T)=\frac{1}{4}$ *»*. В определении речь идёт об элементарных исходах, поэтому правильный порядок рассуждений таков: всего в колоде 36 карт *(несовместные элементарные исходы, образующие полную группу)*, из них 9 карт трефовой масти *(кол-во элементарных исходов, благоприятствующих событию* C_T *)*; по классическому определению вероятности: $P(C_T)=\frac{m}{n}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$.

Вероятности можно выразить и в процентах, например: вероятность выпадение орла равна $\frac{1}{2}\cdot 100\%=50\%$, выпадения пятёрки $\frac{1}{6}\cdot 100\%\approx 16{,}67\%$, извлечения трефы $\frac{1}{4}\cdot 100\%=25\%$.

Принято использовать доли единицы, и, очевидно, что вероятность может изменяться в пределах $0\le P(A)\le 1$. При этом если $P(A)=0$, то событие A является *невозможным*, если $P(A)=1$ – *достоверным*, а если $0<P(A)<1$, то речь идёт о *случайном* событии.

! Если в ходе решения любой задачи у вас получилось какое-то другое значение вероятности – ищите ошибку!

При классическом подходе к определению вероятности крайние значения (ноль и единица) получаются посредством точно таких же рассуждений. Пусть из некой урны, в которой находятся 10 красных шаров, наугад извлекается 1 шар. Рассмотрим следующие события:

K – из урны будет извлечён красный шар;
Z – из урны будет извлечён зелёный шар.

Общее количество исходов: $n=10$. Событию K благоприятствуют все возможные исходы $(m=10)$, следовательно, $P(K)=\frac{m}{n}=\frac{10}{10}=1$, то есть данное событие *достоверно*. Для 2-го же события благоприятствующие исходы отсутствуют $(m=0)$, поэтому $P(Z)=\frac{m}{n}=\frac{0}{10}=0$, то есть событие Z *невозможно*.

Рассмотрим одну важную теорему:

Сумма вероятностей событий, которые образуют полную группу, равна единице. Грубо говоря, если события образуют полную группу, то со 100%-й вероятностью какое-то из них произойдёт. В самом простом случае полную группу образуют противоположные события, например:

A_O – в результате броска монеты выпадет орёл;
$\overline{A}_O$ – в результате броска монеты выпадет решка.

По теореме: $P(A_O)+P(\overline{A}_O)=1$

Пример с кубиком: события $B_5, \overline{B}_5$ противоположны, поэтому $P(B_5)+P(\overline{B}_5)=1$.

Рассматриваемая теорема удобна тем, что позволяет быстро найти вероятность противоположного события. Так, если известна вероятность $P(B_5)=\frac{1}{6}$ того, что выпадет пятёрка, легко вычислить вероятность того, что она не выпадет:

$$P(\overline{B}_5)=1-P(B_5)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

Это гораздо проще, чем суммировать вероятности пяти элементарных исходов.

И в задаче про колоду: поскольку нам известна вероятность $P(C_T)=\frac{1}{4}$ того, что будет извлечена трефа, то легко найти вероятность того, что будет извлечена карта другой масти: $P(C_T)+P(\overline{C}_T)=1 \quad \Rightarrow \quad P(\overline{C}_T)=1-P(C_T)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

Заметьте, что рассмотренные пары событий $B_5, \overline{B}_5$ и $C_T, \overline{C}_T$ не равновероятны, как оно чаще всего и бывает.

В упрощенной версии записи решения вероятность противоположного события стандартно обозначается строчной буквой q. Например, если $p=0{,}7$ – вероятность того, что стрелок попадёт в цель, то $q=1-p=1-0{,}7=0{,}3$ – вероятность того, что он промахнётся.

! В теории вероятностей буквы p и q нежелательно использовать в каких-то других целях.

Рассмотрим примеры решения задач.

Пример 1. У нас есть пакет, в котором лежит 15 шариков, 9 из которых фиолетового цвета, а остальные белые. Какова вероятность вытащить из пакета один белый шарик?
Решение. Итак, общее количество белых шариков 15 – 9 = 6 штук, следовательно количество благоприятных исходов нашего события – 6. Общее количество возможных исходов – 15. Подставляем

$$\mathrm{P}=\frac{6}{15}$$

в формулу и получаем:
Таким образом, вероятность вытащить белый шарик равна 6/15=2/5.

Пример 2. В автомате, продающем маленькие мячики, есть мячи 5 цветов: 21 синих, 30 красных, 15 зеленых, 8 белых, а остальные желтые. Всего в автомате 90 мячиков. Какова вероятность, что Коле достанется мяч не синего цвета.
Решение. Мы обращаем внимание на то, что Коле должен достаться мяч НЕ синего цвета, а любого другого. Итак, общее количество возможных вариантов – 90. Нам нужен любой мяч, кроме синего. Следовательно, количество вариантов, когда выпадет не синий мяч равно 90 – 21 = 69. Таким образом,

$$\mathrm{P}=\frac{69}{90}=\frac{23}{30}$$

вероятность того, что выпадет мячик любого цвета, кроме синего, равна:

Пример 3. На конкурсе выступают 11 участников из Казани, 6 участников из Нижнего Новгорода, 3 участника из Москвы и 7 участников из Твери. Порядок выступления в конкурсе определяется

жеребьевкой. Какова вероятность того, что последним будем выступать конкурсант из Нижнего Новгорода? Результат округлите до сотых.
Решение. Итак, представим, что все конкурсанты подошли к барабану, где лежат номерки и тянут по одному номерку. Общее количество конкурсантов n = 11 + 6 + 3 + 7 = 27. Нас интересует, какова вероятность того, что один из конкурсантов из Нижнего Новгорода вытянет номерок с цифрой 27. Конкурсантов из Нижнего Новгорода всего 6, следовательно m = 6. Таким образом, вероятность будет равна:

$$P = \frac{6}{27} = 0{,}22$$

Пример 4. В портфеле у Васи лежали учебники по алгебре, геометрии, химии, биологии и литературе. Вася не глядя вынимает один учебник, какова вероятность того, что он вытянул алгебру?
Решение. Несмотря на то, что теперь предметы поименованы, принцип решения задачи остался прежним. Общее количество вариантов (т.е. учебников в портфеле) – 5. Нужный нам вариант (т.е. учебник по алгебре) – 1. Следовательно, вероятность нужного нам события равна:
P = 0,2

Пример 5. В группе 30 студентов. Трём студентам следует направиться на кафедру информатики, чтобы взять и принести компьютер и проектор. Вычислить вероятность того, что это сделают три определённых студента.

Решение. Число возможных событий (число способов выбрать трех студентов из 30) рассчитываем, используя формулу числа сочетаний:

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C_{30}^3 = \frac{30!}{3!(30-3)!} = 4060.$$

Вероятность того, что на кафедру отправятся три определённых студента:

$$P(A) = \frac{1}{4060} = 0{,}000246.$$

Пример 6. Продаются 10 мобильных телефонов. Из них у 3 есть дефекты. Покупатель выбрал 2 телефона. Вычислить вероятность того, что оба выбранных телефона будут с дефектами.

Решение. Число всех равновозможных событий (число способов выбрать два телефона из 10) находим по формуле числа сочетаний:

$$n = C_{10}^2 = \frac{10!}{2!(10-2)!} = 45.$$

По той же формуле находим число благоприятных событию возможностей (число способов выбрать два телефона из 3 дефектных):

$$m = C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3.$$

Искомая вероятность того, что оба выбранных телефона будут с дефектами:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{45} = 0{,}067.$$

Пример 7. В ящике 5 апельсинов и 4 яблока. Наудачу выбираются 3 фрукта. Какова вероятность, что все три фрукта – апельсины?

Решение. Элементарными исходами здесь являются наборы, включающие 3 фрукта. Поскольку порядок фруктов безразличен, то общее число элементарных исходов *n* равно числу способов выбрать 3 фрукта из 9, т.е. числу сочетаний C_9^3. Число благоприятствующих исходов m равно числу способов выбора 3 апельсинов из имеющихся 5, т.е. C_5^3. Тогда искомая вероятность

$$P(A)=\frac{C_5^3}{C_9^3}=\frac{\frac{5!}{2!3!}}{\frac{9!}{3!6!}}=0{,}12\,.$$

Пример 8. В ящике 40 деталей: 20 – первого сорта, 15 – второго и 5 – третьего сорта. Найти вероятность того, что наугад извлеченная деталь окажется не третьего сорта.
Событие *А* – наугад извлеченная деталь окажется не третьего сорта.
Событие $\overline{A}$ - наугад извлеченная деталь окажется третьего сорта. *P*($\overline{A}$) = *5/40 (Всего деталей – 40, третьего сорта – 5).*
P(*A*) = 1 - *P*($\overline{A}$) *= 1 – 5/40 = 1 – 1/8 = 7/8*

2. *Выполнить тест (на отдельном листе указать номер вопроса с номером правильного ответа):*

1.Упорядоченное множество, отличающееся только порядком элементов, называется
а) перестановкой
б) размещением
в) сочетанием
г) разностью

2.Упорядоченное подмножество из n элементов по m элементов, отличающиеся друг от друга либо самими элементами либо порядком их расположения, называется …
а) сочетанием
б) размещением
в) перестановкой
г) разностью

3. … из n элементов по m называется любое подмножество из m элементов, которые отличаются друг от друга по крайней мере одним элементом.
а) перестановкой
б) размещением
в) сочетанием
г) разностью

4.Событие, которое обязательно произойдет, называется …
а) невозможным
б) достоверным
в) случайным
г) достоверным и случайным

5.Событие называется …, если оно не может произойти в результате данного испытания.
а) случайным

б) невозможным
в) достоверным
г) достоверным и случайным

6.Событие А и $\overline{A}$ называется …, если непоявление одного из них в результате данного испытания влечет появление другого.
а) совместимым
б) несовместимым
в) противоположным
г) несовместным и противоположным

7.Число перестановок определяется формулой
а) Pn=n!
б) $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$
в) $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$ + n!
г) $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$

8.Число сочетаний определяется формулой
а) $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$
б) $C_m^n = \frac{n!}{(n-m)!}$
в) $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$
г) $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!+n!}$

9.Вероятность достоверного события
а) больше 1
б) равна 1
в) равна 0
г) меньше 1

10.Вероятность невозможного события равна
а) больше 1
б) равна 1
в) равна 0
г) меньше 1

11.Отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний называется
а) классической вероятностью
б) относительной частотой
в) физической частотой
г) геометрической вероятностью

12.Вероятность появления события А определяется неравенством
а) $0<P(A)<1$
б) $0 \le P(A) \le 1$
в) $0<P(A) \le 1$

г) нет верного ответа

13.Сумма вероятностей противоположных событий равна

а) 1
б) 0
в) -1
г) 2

14.Вычислить P_4

а) 4
б) 16
в) 24
г) 32

15.Вычислить A_6^4

а) 8
б) 12
в) 6
г) 16

Все практические работы выполнить на отдельных листках (оформлять аккуратно, разборчивым почерком) сфотографировать и отправить на электронную почту: **olga.georg.gor@yandex.ru**