

**Тема: Предмет теории вероятностей. Понятие о событии, виды событий, действия с событиями.**

**1. Изучить теоретический материал, составить конспект (записать определения, формулы, примеры).**

Что изучает теория вероятностей? Многим в голову наверняка пришли мысли вроде «вероятность дождя велика», «вероятность выигрыша в лотерею мала», «орёл и решка выпадают с вероятностью 50 на 50» и т.п. Но тогда сразу возникает вопрос, при чём здесь наука? И действительно, обывательское понимание вероятности больше смахивает на некое предсказание, часто с изрядной долей мистицизма и суеверий.

**Теория** вероятностей изучает *вероятностные закономерности массовых однородных случайных событий*. То есть, у неё нет цели что-либо угадать, например, результат броска той же монеты в единичном эксперименте. Однако если одну и ту же монету в одинаковых условиях подбрасывать сотни и тысячи раз, то будет прослеживаться чёткая закономерность, описываемая вполне жёсткими законами.

Или пример попроще. Если вы приобретёте лотерейный билет, то вряд ли что-то выиграете и совсем невероятно, что сорвёте крупный куш. Но организатор лотереи даже при случайном розыгрыше тиража (*извлечение пронумерованных шариков и т.п. либо если участники сами угадывают номера*) **гарантированно и с высокой точностью знает**, сколько билетов выиграют/проиграют, и, понятно, остаётся в прибыли. Лотереи часто называют обманом, однако парадокс состоит в том, что **эта гарантия строго обоснована теорией**; равно, как и житейская фраза «всё равно ничего не выиграю». Думаю, теперь все поняли правильный способ заработка на лотереях.

Сначала разберемся с основными терминами.

**События. Виды событий**

Одно из базовых понятий уже озвучено выше – это **событие**. События бывают **достоверными, невозможными и случайными**.

**Достоверным** называют событие, которое в результате **испытания** (*осуществления определенных действий, определённого комплекса условий*) **обязательно произойдёт**. Например, в условиях земного тяготения подброшенная монета непременно упадёт вниз.

**Невозможным** называют событие, которое **заведомо не произойдёт** в результате испытания. Пример невозможного события: в условиях земного тяготения подброшенная монета улетит вверх.

И, наконец, событие называется **случайным**, если в результате испытания оно может, **как произойти, так и не произойти**, при этом должен иметь место принципиальный критерий случайности: случайное событие – есть следствие случайных факторов, воздействие которых предугадать невозможно или крайне затруднительно. Пример: в результате броска монеты выпадет «орёл». В рассмотренном случае случайные факторы – это форма и физические характеристики монеты, сила/направление броска, сопротивление воздуха и т.д.

**Любой** результат испытания называется **исходом**, который, собственно и представляет собой появление определённого события. В частности, при подбрасывании монеты возможно 2 исхода (случайных события): выпадет орёл, выпадет решка. Естественно, подразумевается, что данное испытание проводится в таких условиях, что монета не может встать на ребро или, скажем, зависнуть в невесомости.

События (любые) **обозначают** большими латинскими буквами  $A, B, C, D, E, F, \dots$  либо теми же буквами с подстрочными индексами, например:  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots$ . Исключение составляет буква  $F$ , которая зарезервирована под другие нужды.

Запишем следующие случайные события:

$A_O$  – в результате броска монеты выпадет «орёл»;

$B_5$  – в результате броска игральной кости (кубика) выпадет 5 очков;

$C_T$  – из колоды будет извлечена карта трефовой масти (*по умолчанию колода считается полной*).

Да, события прямо так и записывают в практических задачах, при этом в уместных случаях удобно использовать «говорящие» подстрочные индексы (хотя можно обойтись и без них).

Случайные события обязательно удовлетворяют вышеприведённому критерию случайности. В этом смысле снова показателен 3-й пример: если из колоды изначально удалить все карты трефовой масти, то событие  $C_T$  становится *невозможным*. Наоборот, если испытателю известно, что, например, дама трэф лежит снизу, то он при желании может сделать событие  $C_T$  *достоверным* (=) Таким образом, в данном примере предполагается, что **карты хорошо перемешаны и их рубашки неразличимы**, т.е. колода не является краплёной. Причём, здесь под «крапом» понимаются даже не «умелые руки», ликвидирующие случайность вашего выигрыша, а видимые дефекты карт. Например, рубашка той же дамы трэф может быть грязной, порванной, заклеенной скотчем...

Другая важная характеристика событий – это их **равновозможность**. Два или большее количество событий называют **равновозможными**, если ни одно из них не является более возможным, чем другие. Например:

выпадение орла или решки при броске монеты;

выпадение 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков при броске игрального кубика;

извлечение карты трефовой, пиковой, бубновой или червовой масти из колоды.

При этом предполагается, что монета и кубик однородны и имеют геометрически правильную форму, а колода хорошо перемешана и «идеальна» с точки зрения неразличимости рубашек карт.

Могут ли быть те же события **не равновозможными**? Могут! Например, если у монеты или кубика смещён центр тяжести, то гораздо чаще будут выпадать вполне определённые грани. Как говорится, ещё одна лазейка для мошенников. События  $C_T, C_D, C_C, C_B$  – извлечение трефы, пики, червы или бубны тоже равновозможны. Однако равновозможность легко нарушит фокусник, который, тасуя колоду (даже «идеальную»), ловко подсмотрит и спрячет в рукаве, например, туза трэф. Здесь становится *менее возможным*, что оппоненту будет сдана трефа, и, главное, *менее возможно*, что будет сдан туз.

Тем не менее, в рассмотренных трёх случаях при потере равновозможности всё же сохраняется случайность событий.

## Совместные и несовместные события. Противоположные события. Полная группа событий

События называют **несовместными**, если в одном и том же испытании появление одного из событий **исключает** появление других событий. Простейшим примером несовместных событий является пара **противоположных** событий. Событие, противоположное данному, обычно обозначается той же латинской буквой с чёрточкой сверху. Например:

$A_0$  – в результате броска монеты выпадет орёл;

$\bar{A}_0$  – в результате броска монеты выпадет решка.

Совершенно ясно, что в отдельно взятом испытании появление орла исключает появление решки (и наоборот), поэтому данные события и называются несовместными.

Противоположные события легко формулируются из соображений элементарной логики:

$B_5$  – в результате броска игрального кубика выпадет 5 очков;

$\bar{B}_5$  – в результате броска игрального кубика выпадет число очков, отличное от пяти.

Либо пять, либо не пять – третьего не дано, т.е. события **несовместны и противоположны**.

Аналогично – или трефа или карта другой масти:

$C_T$  – из колоды будет извлечена карта трефовой масти;

$\bar{C}_T$  – из колоды будет извлечена пика, черва или бубна.

Множество несовместных событий образуют **полную группу событий**, если в результате отдельно взятого испытания **обязательно появится одно из этих событий**. Очевидно, что любая пара противоположных событий (в частности, примеры выше) образует полную группу. Однако в различных задачах с одним и тем же объектом могут фигурировать разные события, например, для игрального кубика характерно рассмотрение следующего набора:

$B_1$  – в результате броска игрального кубика выпадет 1 очко;

$B_2$  – ... 2 очка;

$B_3$  – ... 3 очка;

$B_4$  – ... 4 очка;

$B_5$  – ... 5 очков;

$B_6$  – ... 6 очков.

События  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$  **несовместны** (поскольку появление какой-либо грани исключает одновременное появление других) и **образуют полную группу** (так как в результате испытания непременно появится одно из этих шести событий).

Ещё одно важное понятие, которое нам скоро потребуется – это **элементарность** исхода (события). Если совсем просто, то элементарное событие «нельзя разложить на другие события».

Например, события  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$  элементарны, но событие  $\bar{B}_5$  не является таковым, так как подразумевает выпадение 1, 2, 3, 4 или 6 очков (включает в себя 5 элементарных исходов).

В примере с картами события  $C_T, C_P, C_C, C_B$  (извлечение трефы, пика, червы или бубны соответственно) несовместны и образуют полную группу, но они неэлементарны. Если считать, что в колоде 36 карт, то каждое из перечисленных событий включает в себя 9 элементарных исходов.

Аналогично – события  $D_6, D_7, D_8, D_9, D_{10}, D_B, D_D, D_K, D_T$  (извлечение шестёрки, семёрки, ..., короля, туза) несовместны, образуют полную группу и неэлементарны (каждое включает в себя 4 исхода).

Таким образом, элементарным исходом здесь считается лишь извлечение какой-то конкретной карты, и, разумеется, 36 несовместных элементарных исходов тоже образуют полную группу событий.

**Совместные** события менее значимы с точки зрения решения практических задач, но обходить их стороной не будем. События называются **совместными**, если в отдельно взятом испытании появление одного из них **не исключает** появления другого. Например:

$C_T$  – из колоды карт будет извлечена трефа;

$D_7$  – из колоды карт будет извлечена семёрка.

Если быть совсем лаконичным, одно не исключает другого.

Понятие совместности охватывает и бОльшее количество событий:

$D$  – завтра в 12.00 будет дождь;

$G$  – завтра в 12.00 будет гроза;

$S$  – завтра в 12.00 будет солнце.

Ситуация, конечно, довольно редкая, но совместное появление всех трёх событий в принципе не исключено. Следует отметить, что перечисленные события совместны и попарно, т.е. может быть только ливень с грозой или грибной дождик, или погромыкает неподалёку на фоне ясного неба.

### Алгебра событий

Пожалуйста, запомните **ВАЖНЕЙШЕЕ ПРАВИЛО**:

**Операция сложения событий** означает **логическую связку ИЛИ**,  
**а операция умножения событий** – **логическую связку И**.

1) **Суммой** двух событий  $A$  и  $B$  называется событие  $A+B$  которое состоит в том, что наступит **или** событие  $A$  **или** событие  $B$  **или** оба события одновременно. В том случае, если события **несовместны**, последний вариант отпадает, то есть может наступить **или** событие  $A$  **или** событие  $B$ .

Правило распространяется и на бОльшее количество слагаемых, например, событие  $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$  состоит в том, что произойдёт **хотя бы одно** из событий  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ , а **если события несовместны** – **то одно и только одно** событие из этой суммы: **или** событие  $A_1$ , **или** событие  $A_2$ , **или** событие  $A_3$ , **или** событие  $A_4$ , **или** событие  $A_5$ .

Примеров масса:

События  $\bar{B}_5 = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_6$  (при броске игральной кости не выпадет 5 очков) состоит в том, что выпадет **или 1, или 2, или 3, или 4, или 6** очков.

Событие  $B_{1,2} = B_1 + B_2$  (выпадет **не более** двух очков) состоит в том, что появится **1 или 2 очка**.

Событие  $B_{\text{ч}} = B_2 + B_4 + B_6$  (будет чётное число очков) состоит в том, что выпадет **или 2 или 4 или 6** очков.

Событие  $C_{\text{ч}} + C_{\text{б}}$  заключается в том, что из колоды будет извлечена карта красной масти (черва **или** бубна), а событие  $D_{\text{б}} + D_{\text{д}} + D_{\text{к}} + D_{\text{т}}$  – в том, что будет извлечена «картинка» (валет **или** дама **или** король **или** туз).

Чуть занятнее дело с совместными событиями:

Событие  $C_T + D_7$  состоит в том, что из колоды будет извлечена трефа **или** семёрка **или** семёрка треф. Согласно данному выше определению, **хотя бы что-то** – или любая трефа или любая семёрка

или их «пересечение» – семёрка трэф. Легко подсчитать, что данному событию соответствует 12 элементарных исходов (9 трэфовых карт + 3 оставшиеся семёрки).

Событие  $D + G + S$  состоит в том, что завтра в 12.00 наступит **ХОТЯ БЫ ОДНО** из суммируемых **совместных событий**, а именно:

- или будет только дождь / только гроза / только солнце;
- или наступит только какая-нибудь пара событий (дождь + гроза / дождь + солнце / гроза + солнце);
- или все три события появятся одновременно.

То есть, событие  $D + G + S$  включает в себя 7 возможных исходов.

2) **Произведением** двух событий  $A$  и  $B$  называют событие  $AB$ , которое состоит в совместном появлении этих событий, иными словами, умножение  $AB$  означает, что при некоторых обстоятельствах наступит **и** событие  $A$ , **и** событие  $B$ . Аналогичное утверждение справедливо и для большего количества событий, так, например, произведение  $A_1 A_2 A_3 \dots A_{10}$  подразумевает, что при определённых условиях произойдёт **и** событие  $A_1$ , **и** событие  $A_2$ , **и** событие  $A_3$ , ..., **и** событие  $A_{10}$ .

Рассмотрим испытание, в котором подбрасываются две монеты и следующие события:

- $A_1$  – на 1-й монете выпадет орёл;
- $\bar{A}_1$  – на 1-й монете выпадет решка;
- $A_2$  – на 2-й монете выпадет орёл;
- $\bar{A}_2$  – на 2-й монете выпадет решка.

Тогда:

- событие  $A_1 A_2$  состоит в том, что на обеих монетах (на 1-й **и** на 2-й) выпадет орёл;
- событие  $\bar{A}_1 \bar{A}_2$  состоит в том, что на обеих монетах (на 1-й **и** на 2-й) выпадет решка;
- событие  $A_1 \bar{A}_2$  состоит в том, что на 1-й монете выпадет орёл **и** на 2-й монете решка;
- событие  $\bar{A}_1 A_2$  состоит в том, что на 1-й монете выпадет решка **и** на 2-й монете орёл.

Нетрудно заметить, что события  $A_1 A_2$ ,  $\bar{A}_1 \bar{A}_2$ ,  $A_1 \bar{A}_2$ ,  $\bar{A}_1 A_2$  **несовместны** (т.к. не может, например, выпасть 2 орла и в то же самое время 2 решки) и образуют **полную группу** (поскольку учтены **все** возможные исходы броска двух монет). Давайте просуммируем данные

события:  $A_1 A_2 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 + A_1 \bar{A}_2 + \bar{A}_1 A_2$ . Как интерпретировать эту запись? Очень просто – умножение означает логическую связку **И**, а сложение – **ИЛИ**.

Таким образом, сумму  $A_1 A_2 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 + A_1 \bar{A}_2 + \bar{A}_1 A_2$  легко прочесть понятным человеческим языком: «выпадут два орла **или** две решки **или** на 1-й монете выпадет орёл **и** на 2-й решка **или** на 1-й монете выпадет решка **и** на 2-й монете орёл»

Это был пример, когда в **одном испытании** задействовано несколько объектов, в данном случае – две монеты. Другая распространенная в практических задачах схема – это **повторные испытания**, когда, например, один и тот же игральный кубик бросается 3 раза подряд. В качестве демонстрации рассмотрим следующие события:

- $E_{(1)4}$  – в 1-м броске выпадет 4 очка;

$B_{(2)5}$  – во 2-м броске выпадет 5 очков;

$B_{(3)6}$  – в 3-м броске выпадет 6 очков.

Тогда событие  $B_{(1)4} \cdot B_{(2)5} \cdot B_{(3)6}$  состоит в том, что в 1-м броске выпадет 4 очка **и** во 2-м броске выпадет 5 очков **и** в 3-м броске выпадет 6 очков. Очевидно, что в случае с кубиком будет значительно больше **комбинаций** (исходов), чем, если бы мы подбрасывали монету.

## **2. Ответить на контрольные вопросы (устно):**

- Какие виды событий существуют?
- Что такое случайность и равновозможность события?
- Как вы понимаете термины совместность/несовместность событий?
- Что такое полная группа событий, противоположные события?
- Как определяется сумма и произведение событий?